上海财经大学

报考专业:概率论与数理统计

考试科目:高等代数

一、(本题 10 分)

求一个次数尽可能低的多项式 $f(x)$,使:

$f(-1)=-1, f(0)=-1, f(1)=1, f(2)=5$

二、(本题 10 分)

求矩阵 X,使:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

三、(本题 15 分)

设 A,B 为 $n\times n$ 矩阵,E 是 n 级单位矩阵。证明:

1. 如果 $AB=0$,那么秩$(A)+$秩$(B)\leqslant n$
2. 如果 $A^2=A$,则秩$(A)+$秩$(A-E)=n$

四、(本题 10 分)

证明:实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$(其中 A 是实对称 $n\times n$ 矩阵)为半正定的充分必要条件是:有实矩阵 G,使得 $A=G'G$。

五、(本题 20 分)

设 A 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换,对于 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$。

$$A\varepsilon_1=\varepsilon_2+\varepsilon_3+\cdots+\varepsilon_n,$$
$$A\varepsilon_2=\varepsilon_1+\varepsilon_3+\cdots+\varepsilon_n,$$

$$\cdots\cdots$$

$$A\varepsilon_k=\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{k-1}+\varepsilon_{k+1}+\cdots+\varepsilon_n,$$

$$\cdots\cdots$$

$$A\varepsilon_n=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{n-1}$$

1. 求 A 的秩和零度；

2. 求 A 的特征值和特征向量；

3. 就 $n=3$ 的情形，写出 A 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵 A，并求一可逆矩阵 T，使 $T^{-1}AT$ 成对角形。

六、(本题 10 分)

用正交线性替换化二次型 $2x_1x_2+2x_3x_4$ 为标准形。

七、(本题 15 分)

1. 利用欧氏空间中“向量到子空间各向量间的距离以垂线最短”的原理，给出实系数线性方程组 $AX=B$ 的最小二乘解所满足的代数条件。

2. 求下列方程组的最小二乘解：

$$\begin{cases}0.39x-1.89y=1\\0.61x-1.80y=1\\0.93x-1.68y=1\\1.35x-1.50y=1\end{cases}$$

(用三位有效数字计算；本题可以使用计算器。)

八、(本题 10 分)

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是线性空间 V 的一组基，f_1,f_2,f_3 是它的对偶基，

$$\eta_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3,\ \eta_2=\varepsilon_1+2\varepsilon_2,\ \eta_3=\varepsilon_3,$$

试证 η_1,η_2,η_3 是 V 的一组基，并求它的对偶基(用 f_1,f_2,f_3 表示出)。