上海财经大学

报考专业:数量经济学

考试科目:概率论与数理统计 A

说明:本考试有附表。

一、(本题 20 分)

如果 $i'=(1,1,\cdots,1)$,$x'=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是 $1\times n$ 维向量,

1. 基本部分

证明:

(1)$(i'i)^{-1}i'x=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$;

(2)若 $P=i(i'i)^{-1}i'$,则 $P'=P$ 以及 $PP=P$;

(3)$x'(I_n-P)x=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$,这里 I_n 是 n 阶单位方阵。

2. 设 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$独立同服从于正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,$\sigma Z_i=X_i-\mu$,$X'=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,$Z'=(Z_1,Z_2,\cdots,Z_n)$。

证明:

(1)$\sigma(I_n-P)Z=(I_n-P)X$;

(2)$Z'(I_n-P)Z=X'(I_n-P)X/\sigma^2$;

(3)$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2/\sigma^2\sim x^2(n-1)$ 与 $\overline{X}\sim N(\mu,\sigma^2/n)$ 是相互独立的。

二、(本题 20 分)

设 Y_1,Y_2 相互独立,同服从实数区间$(0,1)$上的均匀分布,令 $U=\min(Y_1,Y_2)$,$V=\max(Y_1,Y_2)$。

试求:

(1)条件期望 $E[V|U=u]$;

(2)条件期望 $E[\sin(UV)|U=u]$;

这里,$\sin(\cdot)$是正弦函数,u 为随机变量 U 所取的某一特定数值。

三、(本题 20 分)

设 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$为独立同来自于下述分布密度的一个子样,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta^2}\exp\left\{-\dfrac{x^2}{\theta^2}\right\} & x>0 \\ 0 & x\leqslant 0\end{cases} \qquad (\theta>0)$$

试求:

(1)参数 θ 的矩法估计,说明它是否为无偏?

(2)参数 θ 的最大似然估计,说明它是否为无偏?

(3)参数 θ 的函数 $g(\theta)=e^{\theta}$ 的最大似然估计量。

四、(本题 20 分)

假定我们按照绝对收入学说的观点,建立消费 c_t 与收入 $y_t(t=1,2,\cdots,T)$之间的一元回归模型:$c_t=\alpha_0+\alpha_1 y_t+\varepsilon_t$,其中 ε_t 为随机误差项,收入 y_t 为确定性变量,满足:

(1)$E(\varepsilon_t)=0$ 对任何 $t=1,2,\cdots,T$ 都成立;

(2)$E(\varepsilon_t\varepsilon_s)=0$ 对任何 $t\neq s,t,s=1,2,\cdots,T$ 都成立;

(3)$E(\varepsilon_t^2)=\sigma^2$ 对任何 $t=1,2,\cdots,T$ 都成立;

(4)$E(y_t\varepsilon_t)=0$ 对任何 $t=1,2,\cdots,T$ 都成立;

证明:

(1) 参数 α_0,α_1 的最小二乘估计量分别为 $\hat{\alpha}_0=\bar{y}-\hat{\alpha}_1\bar{x}$,$\hat{\alpha}_1=\dfrac{\sum\limits_{t=1}^{T}(c_t-\bar{c})y_t}{\sum\limits_{t=1}^{T}(y_t-\bar{y})^2}$;

(2)$\hat{\alpha}_0,\hat{\alpha}_1$ 是参数 α_0,α_1 的无偏估计量；

(3)在参数 α_1 的线性无偏估计类中 $\hat{\alpha}_1$ 的方差最小；

(4)若残差定义为 $e_t=c_t-(\hat{\alpha}_0+\hat{\alpha}_1 y_t)$，则残差 e_t 与参数估计 $\hat{\alpha}_1$ 互不相关，即它们的协方差 $\mathrm{Cov}(e_t,\hat{\alpha}_1)=0$。

五、(本题 20 分)

某种羊毛，在处理之前与处理之后分别进行随机抽样，分析其含脂率，得到如下数据：

处理之前含脂率为 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$，其平均值 $\bar{x}=0.273$，子样方差 $s_{1,10}^2=\dfrac{1}{9}\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2=0.028\,1$；

处理之后含脂率为 $y_1,y_2,\cdots,y_{10}$，其平均值 $\bar{y}=0.133$，子样方差 $s_{2,10}^2=\dfrac{1}{9}\sum\limits_{i=1}^{10}(y_i-\bar{y})^2=0.064\,2$；

现假定处理前后含脂率都服从正态分布。(1) 问处理后含脂率母体的方差有无显著性变化(显著性水平 $\alpha=0.05$)?(2) 如果处理后含脂率母体的方差无显著性变化，问处理后含脂率母体的均值有无显著性变化?(显著性水平 $\alpha=0.05$)