上海财经大学

报考专业:概率论与数理统计
考试科目:数学分析

一、(本题 10 分)

写出二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的 Taylor 公式及 Lagrange 余项。

二、(本题 10 分)

叙述 n 元隐函数存在定理。

三、(本题 10 分)

写出 Gamma 函数 $\Gamma(s)$ 的定义,并证明 $\Gamma(s)$ 的定义域为 $s>0$,且 $\Gamma(s)$ 在定义域内连续。

四、计算下列各题(每题 9 分,共 63 分)

①$I=\int\frac{\sin(2nx)}{\sin x}dx$,其中 n 为正整数。

②已知 $y=\frac{(x+5)^7(x+6)^8x^{(x+1)}}{x^2(x+1)^2(x+2)^{e^x}}$,求 y'。

③设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}$。

④计算 $\iint_\Omega \sin x^2\,dxdy$,其中 Ω 为 $y=0$,$x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 及 $y=x$ 所围区域。

⑤计算 $\iint_\Sigma\frac{ax\,dydz+(z+a)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$,其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧,a 为大于 0 的常数。

⑥过直线$\begin{cases}10x+2y-2z=27\\x+y-z=0\end{cases}$作曲面$3x^2+y^2-z^2=27$的切平面，求此切平面方程。

⑦求级数$1\times 2x+2\times 3x^2+3\times 4x^3+\cdots$的和函数，并计算$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n+1}}$。

五、证明下列各题

(1)已知$f(x)$在有限开区间(a,b)上一致连续，求证$f(x)$在(a,b)上有界。(9分)

(2)设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是$R$上的级数，求证：

①若$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=\lambda\neq 0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散。(5分)

②若$\{u_n\}$单调下降，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=0$。(10分)

(3)叙述积分第二中值定理，并对$f(x)$在$[a,b]$上连续，$g(x)$在$[a,b]$上可导的特殊情况证明该定理。(10分)

六、(本题10分)

设$a>0,a_i>0,i=1,2,\cdots,n$求n元函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$$

在约束条件$x_1+x_2+\cdots+x_n=a(x_i>0,i=1,2,\cdots,n)$下的极值。

七、(本题13分)

设$f:R_+\to R$是连续函数，使得$\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$收敛。$\forall x\geqslant 0$，

令 $g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，求证：广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，且

$$\int_0^{+\infty}\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\leqslant 4\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$$