

# 上海财经大学

报考专业: 概率论与数理统计

考试科目: 数学分析

一、(本题 10 分)

写出二元函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的 Taylor 公式及 Lagrange 余项。

二、(本题 10 分)

叙述  $n$  元隐函数存在定理。

三、(本题 10 分)

写出 Gamma 函数  $\Gamma(s)$  的定义, 并证明  $\Gamma(s)$  的定义域为  $s > 0$ , 且  $\Gamma(s)$  在定义域内连续。

四、计算下列各题(每题 9 分, 共 63 分)

①  $I = \int \frac{\sin(2nx)}{\sin x} dx$ , 其中  $n$  为正整数。

② 已知  $y = \frac{(x+5)^7(x+6)^8 x^{(x+1)}}{x^2(x+1)^2(x+2)^{e^x}}$ , 求  $y'$ 。

③ 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2}$ 。

④ 计算  $\iint_{\Omega} n \sin x^2 dx dy$ , 其中  $\Omega$  为  $y=0, x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$  及  $y=x$  所围区域。

⑤ 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{ax dy dz + (z+a)^2 dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$ , 其中  $\Sigma$  为下半球面  $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  的上侧,  $a$  为大于 0 的常数。



⑥过直线  $\begin{cases} 10x+2y-2z=27 \\ x+y-z=0 \end{cases}$  作曲面  $3x^2+y^2-z^2=27$  的切平面,求此切平面方程。

⑦求级数  $1 \times 2x + 2 \times 3x^2 + 3 \times 4x^3 + \cdots$  的和函数,并计算  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n+1}}$ 。

### 五、证明下列各题

(1)已知  $f(x)$  在有限开区间  $(a, b)$  上一致连续,求证  $f(x)$  在  $(a, b)$  上有界。(9分)

(2)设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  是  $R$  上的级数,求证:

①若  $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = \lambda \neq 0$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散。(5分)

②若  $\{u_n\}$  单调下降,且  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛,则  $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 0$ 。(10分)

(3)叙述积分第二中值定理,并对  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $g(x)$  在  $[a, b]$  上可导的特殊情况证明该定理。(10分)

### 六、(本题 10 分)

设  $a > 0, a_i > 0, i=1, 2, \dots, n$  求  $n$  元函数

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$$

在约束条件  $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a (x_i > 0, i=1, 2, \dots, n)$  下的极值。

### 七、(本题 13 分)

设  $f: R_+ \rightarrow R$  是连续函数,使得  $\int_0^{+\infty} f^2(x) dx$  收敛。  $\forall x \geq 0$ ,



令  $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ , 求证: 广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{g^2(x)}{x^2} dx$  收敛, 且

$$\int_0^{+\infty} \frac{g^2(x)}{x^2} dx \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2(x) dx$$

由一元函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的 Taylor 公式为  

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} (x - x_0) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial y} (y - y_0) + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (y - y_0)^2 \right) + \dots$$
  
 余项为  $R_n$ .

证: 由题设,  $f(x) \in L^2(a, b)$ , 故  $f(x)$  在  $(a, b)$  上可积. 记  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ , 则  $F(x) \in C^1(a, b)$ . 由分部积分法, 得  

$$\int_a^b \frac{F^2(x)}{x^2} dx = \left[ -\frac{F^2(x)}{x} \right]_a^b + \int_a^b \frac{2F(x)f(x)}{x^2} dx = -\frac{F^2(b)}{b} + \frac{F^2(a)}{a} + 2 \int_a^b \frac{F(x)f(x)}{x^2} dx$$
  
 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 得  

$$\left| \int_a^b \frac{F(x)f(x)}{x^2} dx \right| \leq \left( \int_a^b \frac{F^2(x)}{x^2} dx \right)^{1/2} \left( \int_a^b \frac{f^2(x)}{x^2} dx \right)^{1/2}$$
  
 故  

$$\int_a^b \frac{F^2(x)}{x^2} dx \leq \frac{F^2(b)}{b} + \frac{F^2(a)}{a} + 2 \left( \int_a^b \frac{F^2(x)}{x^2} dx \right)^{1/2} \left( \int_a^b \frac{f^2(x)}{x^2} dx \right)^{1/2}$$
  
 令  $I = \int_a^b \frac{F^2(x)}{x^2} dx$ , 则  

$$I \leq \frac{F^2(b)}{b} + \frac{F^2(a)}{a} + 2I^{1/2} \left( \int_a^b \frac{f^2(x)}{x^2} dx \right)^{1/2}$$
  
 移项, 平方, 得  

$$I^2 \leq \left( \frac{F^2(b)}{b} + \frac{F^2(a)}{a} \right)^2 + 4I \left( \int_a^b \frac{f^2(x)}{x^2} dx \right)$$
  
 故  

$$I \leq \frac{F^2(b)}{b} + \frac{F^2(a)}{a} + 4 \int_a^b \frac{f^2(x)}{x^2} dx$$
  
 由题设,  $f(x) \in L^2(a, b)$ , 故  $\int_a^b \frac{f^2(x)}{x^2} dx < +\infty$ . 故  $I < +\infty$ . 证毕.

三、(本题 10 分)  
 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) = f(b) = 0$ . 证明:  $\int_a^b f(x) dx = 0$  的充要条件是  $f(x) \equiv 0$ .

证: (充分性) 若  $f(x) \equiv 0$ , 则  $\int_a^b f(x) dx = 0$ .  
 (必要性) 若  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上不恒为 0. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值为  $M$ , 最小值为  $m$ . 则  $M > 0$  或  $m < 0$ . 不妨设  $M > 0$ . 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上至少有一点  $\xi$  使得  $f(\xi) = M$ . 由积分中值定理, 得  

$$\int_a^b f(x) dx = M \int_a^b \chi_{[\xi, \xi+\delta]}(x) dx + \int_a^b f(x) \chi_{[a, b] \setminus [\xi, \xi+\delta]}(x) dx$$
  
 其中  $\chi_{[\xi, \xi+\delta]}(x)$  为特征函数. 故  

$$0 = \int_a^b f(x) dx \geq M \delta - \int_a^b f(x) \chi_{[a, b] \setminus [\xi, \xi+\delta]}(x) dx$$
  
 故  

$$\delta \leq \frac{1}{M} \int_a^b f(x) \chi_{[a, b] \setminus [\xi, \xi+\delta]}(x) dx$$
  
 由 Lebesgue 定理, 得  

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^b f(x) \chi_{[a, b] \setminus [\xi, \xi+\delta]}(x) dx = \int_a^b f(x) \chi_{[a, b] \setminus \{\xi\}}(x) dx = \int_a^b f(x) dx = 0$$
  
 故  $\delta \leq 0$ . 故  $M = 0$ . 同理,  $m = 0$ . 故  $f(x) \equiv 0$ . 证毕.

四、(本题 10 分)  
 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) = f(b) = 0$ . 证明:  $\int_a^b f(x) dx = 0$  的充要条件是  $f(x) \equiv 0$ .

证: (充分性) 若  $f(x) \equiv 0$ , 则  $\int_a^b f(x) dx = 0$ .  
 (必要性) 若  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上不恒为 0. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值为  $M$ , 最小值为  $m$ . 则  $M > 0$  或  $m < 0$ . 不妨设  $M > 0$ . 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上至少有一点  $\xi$  使得  $f(\xi) = M$ . 由积分中值定理, 得  

$$\int_a^b f(x) dx = M \int_a^b \chi_{[\xi, \xi+\delta]}(x) dx + \int_a^b f(x) \chi_{[a, b] \setminus [\xi, \xi+\delta]}(x) dx$$
  
 其中  $\chi_{[\xi, \xi+\delta]}(x)$  为特征函数. 故  

$$0 = \int_a^b f(x) dx \geq M \delta - \int_a^b f(x) \chi_{[a, b] \setminus [\xi, \xi+\delta]}(x) dx$$
  
 故  

$$\delta \leq \frac{1}{M} \int_a^b f(x) \chi_{[a, b] \setminus [\xi, \xi+\delta]}(x) dx$$
  
 由 Lebesgue 定理, 得  

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^b f(x) \chi_{[a, b] \setminus [\xi, \xi+\delta]}(x) dx = \int_a^b f(x) \chi_{[a, b] \setminus \{\xi\}}(x) dx = \int_a^b f(x) dx = 0$$
  
 故  $\delta \leq 0$ . 故  $M = 0$ . 同理,  $m = 0$ . 故  $f(x) \equiv 0$ . 证毕.

五、(本题 10 分)  
 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) = f(b) = 0$ . 证明:  $\int_a^b f(x) dx = 0$  的充要条件是  $f(x) \equiv 0$ .