download.kaoyan.com

上海财经大学

报考专业:理学各专业

数学

考试科目:分析基础

一、叙述下列定义(每小题6分,共计18分)

1. 设 $X\subset R^n$,$f(x)$ 在 X 上有定义,叙述 $f(x)$ 在 X 上一致连续的定义。

2. 设 $z=f(x,y)$ 为定义在 $D\subset R^2$(D 为开集)上的二元函数,$P_0\in D$,叙述 $f(x,y)$ 在 P_0 点沿方向 l 的方向导数的定义,并指出方向导数与梯度的关系。

3. 叙述 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 积分的定义,并指出 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系。

二、计算下列各题(每小题12分,共计60分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}+\cdots+\dfrac{n}{a^n}\right]$,其中 $a>1$。

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^4}}$。

3. 求椭球体 $\Omega=\left\{(x,y,z)\left|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1\right.\right\}$ 的体积。

4. 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,当 $n>1$ 时,$a_{n-2}-n(n-1)a_n=0$,且 $a_0=4,a_1=1$,求此级数的和函数。

5. 设 $u(x,y),v(x,y)$ 在闭区域 $D:x^2+y^2\leqslant 1$ 上有一阶连续偏导数,记

$$F(x,y)=(u(x,y),v(x,y)),G(x,y)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

已知在 D 的边界 C 上,有 $u(x,y)=1,v(x,y)=y$,求

download.kaoyan.com

$$\iint_D F \cdot G \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中,$F \cdot G$ 表示 F 与 G 的内积。

三、证明下列各题(每小题 12 分,共计 60 分)

1. 叙述并证明控制收敛定理。

2. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导,且有

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=A$$

求证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=A$。

3. 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty]$ 上的凸函数,求证:

$$H(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

也是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数。

4. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为条件收敛级数,记

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_k|+a_k}{2},\quad v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_k|-a_k}{2}$$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=1$。

5. 设 $\{f_n\}$ 是 $L^p(\Omega)$ 中序列 $(p\geqslant 1)$,f 是 $L^p(\Omega)$ 中函数,且

$f_n\to f$(在 Ω 上几乎处处收敛),$\|f_n\|_p\to\|f\|_p$

则一定有 $\{f_n\}$ 强收敛于 f。对 $p=1$ 证明上述结论。

四、(本题 12 分)

求中心在原点的椭圆 $x^2-4xy+5y^2=1$ 的长半轴与短半轴的长度。