

# 上海财经大学

报考专业:理学各专业

考试科目:代数与方程

一、(本题 10 分)

求下列  $n$  阶矩阵的逆矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

二、(本题 10 分)

讨论下列线性方程组的解:

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = -2 \end{cases}$$

三、(本题 10 分)

设  $A$  是可逆实对称  $n$  阶方阵,  $B$  是实反对称  $n$  阶方阵, 且  $AB=BA$ , 求证:  $A+B$  可逆。

四、(本题 10 分)

设  $A$  是奇数阶正交矩阵, 且  $\det A > 0$ , 求证:  $A$  有特征值 1。

五、(本题 20 分)

设  $A$  是三维线性空间  $V$  的一个线性变换, 对于  $V$  的一组基  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ , 有



$$A\epsilon_1 = \epsilon_1 + 2\epsilon_2 - 3\epsilon_3,$$

$$A\epsilon_2 = -\epsilon_1 + 4\epsilon_2 - 3\epsilon_3,$$

$$A\epsilon_3 = \epsilon_1 - 2\epsilon_2 + 5\epsilon_3$$

- (1) 求  $A$  的秩和零度;
- (2) 求  $A$  的特征值和特征向量;
- (3) 写出  $A$  在基  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  下的矩阵  $A$ , 并求可逆矩阵  $T$ , 使  $T^{-1}AT$  成对角形。

六、(本题 10 分)

用正交线性替换化二次型  $x_2^2 + 2x_1x_3$  为标准形。

七、(本题 10 分)

$n$  阶实对称矩阵  $A$  为半正定的充要条件是: 对任意的  $k > 0$ ,  $A + kI$  为正定矩阵。试证之。

八、(本题 10 分)

设  $A$  是  $n$  阶实对称正定矩阵, 求函数  $f(x) = x'Ax + 2\beta'x + c$  的最小值, 其中  $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ ,  $b_i (i=1, 2, \dots, n)$  和  $c$  都是实数。

九、(本题 20 分)

求下列微分方程的通解:

$$(1) y(y-1)dx + xdy = 0;$$

$$(2) x^2 y'' - 2xy' + 2y = x \ln x.$$

十、(本题 10 分)

对于线性微分方程  $xy'' - (x+2)y' + y = 0$ , 求:

- (1) 一个(形如多项式的)特解;



(2)通解。

十一、(本题 10 分)

求下列 Sturm-Liouville 问题的特征值与特征函数:

$$y'' + \lambda y = 0; y(\pi) = 0, y'(0) = 0$$

十二、(本题 10 分)

证明方程  $e^x y'' - xy' = 1 + x^2$  的解  $y$  在任何区间  $[a, b]$  上都满足  $y(x) \leq \max\{y(a), y(b)\}, x \in (a, b)$ 。

十三、(本题 10 分)

对于怎样的常数  $p$  和  $q$ , 方程  $y'' + py' + qy = 0$  的所有解当  $x \rightarrow +\infty$  时都趋于零?