

上海财经大学

报考专业:理学各专业

考试科目:数学分析

一、叙述下列定义(每小题 5 分,共计 10 分)

1. 一元函数 $y=f(x)$ 的“一阶微分形式不变性”。

2. 函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的全微分。

二、计算下列各题(每小题 11 分,共计 77 分)

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$ 。

2. $\int e^{2x} (\tan x + 1)^2 dx$ 。

3. 计算 $\iint_{\Omega} xy dx dy$, 其中 Ω 为抛物线 $y^2 = x$ 和直线 $y = x - 2$ 所围的闭区域。

4. 计算曲面积分

$$I = \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$$

其中 S 为锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \leq z \leq h$) 所示那部分的外侧。

5. 设

$$f(x) = \begin{cases} \ln \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

求 $f(x)$ 的麦克劳林级数展开式中 x^4 的系数。

6. 设 $u=f(r)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 若 u 满足调和方程

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

求函数 $f(r)$ 。

7. 设函数 $f(x)$ 满足 $3f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} (x \neq 0)$, 求 $f(x)$ 的极值。

三、证明下列各题(每小题 12 分, 共计 48 分)

1. 叙述并证明数列的 Cauchy 收敛原理。
2. 设 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上单调, 求证 $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) \sin \lambda x dx = 0$ 。
3. 设 $a > 0$ 是常数, $f(x)$ 在 $[-2a, +2a]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0) = a, f(a) = b, f'(0) = -1$, 对任意 $x \in [-2a, 2a]$ 有 $|f''(x)| < \frac{1}{4a}$, 求证:

$$(1) \forall x \in [-2a, 2a], \text{ 有 } |1 + f'(x)| < \frac{1}{2};$$

$$(2) |f(a+b)| < \frac{a}{4}.$$

4. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}} \right]$ 收敛, 并且其和小于 1。

四、(本题 15 分)

设有一座小山, 取它的底面所在的平面为 Oxy 坐标平面, 其底部所占的区域为

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 - xy \leq 75\}$$

小山的高度函数为 $h(x, y) = 75 - x^2 - y^2 + xy$ 。

(1) 设 $M(x_0, y_0)$ 为区域 D 上一点, 问 $h(x, y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大? 若记此方向导数的最大值为 $g(x_0, y_0)$, 试写出 $g(x_0, y_0)$ 的表达式。

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动, 为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点。也就是说, 要在 D 的边界线

$x^2 + y^2 - xy = 75$ 上找出使(1)中的 $g(x, y)$ 达到最大值的点, 试确定攀登起点的坐标。

(3) 当 k 为何值时, 函数 $f(x, y) = kx^2 + 2xy + ky^2$ 是单位正交变换?

六、(本题 10 分)

(1991 年数一)

用正交线性变换化下列二次型为标准形, 并求其秩。

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 4xy + 2y^2 + 2xz + 2yz + 2z^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

七、(本题 10 分)

(1991 年数一)

设 A 是 n 阶方阵, 且 $A^2 = A$, 证明: A 的特征值只能是 0 或 1。

证: 设 λ 是 A 的特征值, α 是对应的特征向量, 则 $A\alpha = \lambda\alpha$, 于是 $A^2\alpha = A(\lambda\alpha) = \lambda(A\alpha) = \lambda^2\alpha$, 又 $A^2\alpha = A\alpha = \lambda\alpha$, 故 $\lambda^2\alpha = \lambda\alpha$, 即 $\lambda(\lambda - 1)\alpha = 0$, 因为 $\alpha \neq 0$, 所以 $\lambda(\lambda - 1) = 0$, 即 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$ 。

八、(本题 10 分)

(1991 年数一)

设 A 是 n 阶方阵, 且 $A^2 = A$, 证明: A 的秩等于 A 的迹。

证: 由题设 $A^2 = A$, 知 A 的特征值只能是 0 或 1。设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的特征值, 则 $\lambda_i^2 = \lambda_i$, 即 $\lambda_i(\lambda_i - 1) = 0$, 所以 $\lambda_i = 0$ 或 $\lambda_i = 1$ 。于是 $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ 等于特征值 1 的个数, 即 A 的秩。

九、(本题 10 分)

(1991 年数一)

求下列微分方程的通解。

(1) $y'' + y' + y = 0$

(2) $y'' + y' + y = 1$

(3) $xy'' + (x-1)y' - y = 0$

(4) $xy'' + (x-1)y' - y = 1$

(5) $xy'' + (x-1)y' - y = x$

(6) $xy'' + (x-1)y' - y = x^2$

(7) $xy'' + (x-1)y' - y = x^3$

(8) $xy'' + (x-1)y' - y = x^4$

(9) $xy'' + (x-1)y' - y = x^5$

(10) $xy'' + (x-1)y' - y = x^6$