

报考专业:理学各专业
考试科目:代数与方程

一、(本题 10 分)

求下列 n 阶矩阵的逆矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

二、(本题 10 分)

下列线性方程组有解但不惟一,试求 k 的值。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \\ kx_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

三、(本题 10 分)

设 A, B 均为 n 阶方阵, I 为 n 阶单位阵, 且 $A + B = AB$, 求证: $A - I$ 可逆。

四、(本题 10 分)

设 A 是 n 阶正定矩阵, I 为 n 阶单位阵, 求证: $\det(A + I) > 1$ 。

五、(本题 20 分)

设 A 是三维欧氏空间上的一个对称线性变换, 且满足 $A^2 + 2A = 0$ 。已知 A 的秩为 2。

(1) 求 A 的零度;

(2) 求 A 的全部特征值;

(3) 当 k 为何值时, 变换 $A+kI$ 正定? (这里 I 是单位变换)

六、(本题 10 分)

用正交线性替换化下列二次型为标准形:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$$

七、(本题 10 分)

三阶方阵 A 有三个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 对应的特征向量依次为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; 令 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 试证明: $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关。

八、(本题 10 分)

设 A 是欧氏空间 V 的一个变换, 且满足

$$(A\alpha, A\beta) = (\alpha, \beta), \alpha, \beta \in V$$

则 A 必为线性变换。试证之。

九、(本题 30 分)

求下列微分方程的通解:

$$(1) (y^2 + x^3)dx = 2xydy;$$

$$(2) x^2 y'' + 2xy' - 2y = x;$$

$$(3) xy'' + (x-1)y' - y = 0.$$

十、(本题 10 分)

求下列微分方程组的通解:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} x$$

十一、(本题 10 分)

证明:方程 $y'' - y' \sin x = 1$ 的解 y 在任何区间 $[a, b]$ 上都满足 $y(x) \leq \max\{y(a), y(b)\}, x \in (a, b)$ 。

十二、(本题 10 分)

设 $f(x)$ 是以 L 为周期的函数, $y(x)$ 是方程 $y' + y = f(x)$ 的解, 并且满足 $y(L) = y(0)$ 。证明: $y(x)$ 是以 L 为周期的函数。

性。

性。

国家

二、(本题 10 分)

三、(本题 10 分)

四、(本题 10 分)

五、(本题 20 分)