东 华 大 学

2000年硕士研究生招生考试试题

考试科目：数学分析

(1)(7分). 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$

(2)(7分). 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\,\pi)$ 的收敛性.

(3)(7分) 计算积分 $\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x}\,dx$

(4)(7分). $y=x^2e^{3x}$，计算 $y^{(n)}$.

(5)(7分) 计算积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$，

其中 Ω：由 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ 围成.

(6)(7分). 计算积分 $\int_L x^2\,ds$.

其中 L: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0. \end{cases}$

二.(1)(6分). 举一个在 $(-\infty,+\infty)$ 上在 $x=0$ 连续，其余处不连续的函数的例子

(2)(6分) 举一个在 $[0,1]$ 上不可积的有界函数的例子.

(3)(6分). 举一个在 $n=1,2,3,\cdots$ 处不可导的连续函数的例子.

三.(15分). $f(x)$在$[0,1]$上连续. $\int_0^1 f(x)dx=0$.
证明存在 $\xi\in(0,1)$. $f(\xi)=\int_0^{\xi} f(x)dx$

四.(12分). 利用致密性定理证明闭区间上连续函数一定一致连续.

五(13分) $f(x,\lambda)$ 在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连续.
且 $\int_a^{+\infty} f(x,\lambda)\,dx$ 在 $[c,d)$ 上一致收敛.
证明 $\int_a^{+\infty} f(x,d)$ 收敛.