东　华　大　学

2000 年硕士研究生招生考试试题

考试科目：高等代数

一.(10分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & \alpha & \beta\\ 0 & 1 & \alpha\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$．求 A^2, A^3, A^n（n为自然数）．

二.(10分) 设 A, B 为正交矩阵且 $\frac{|A|}{|B|}=-1$．求证 $A+B$ 不可逆．

三.(20分) 设方程组
$$\begin{cases}4x_1+3x_2+2x_3+8x_4=a_1,\\ 3x_1+4x_2+x_3+7x_4=a_2,\\ x_1+x_2+x_3+x_4=1.\end{cases}$$

(1) 证明这方程组对任意实数 a_1, a_2 均有解；

(2) 求出它的一切解．

四.(20分) 试将 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+bx_2^2+ax_3^2+2x_1x_3$ 化为标准形，求出所用的变换矩阵，并指出 a, b 满足什么条件，f 为正定二次型．

五.(20分) 设 T 为 $R^3\to R^3$ 的线性变换．已知
$T(1,0,0)=(1,0,1)$，$T(0,1,0)=(2,1,1)$，$T(0,0,1)=(-1,1,-2)$．

(1) 求矩阵 A，使 $T(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)A$；

(2) 设 $T(R^3)=B$，求B的一组基；

(3) 求出满足 $TX=0$，$X\in R^3$ 的点X的全体.

六.(20分) 设V为有限维欧氏空间，其内积记为 (α,β). 又设T为V的一个正交变换. 记 $V_1=\{\alpha \mid T\alpha=\alpha\}$，$V_2=\{\alpha-T\alpha \mid \alpha\in V\}$. 求证 $V=V_1\dotplus V_2$.