东华大学

2001年 硕士 学位研究生招生考试试题

科目：数学分析（应用数学专业）

（考生注意：答案须写在答题纸上。写在本试题上，一律不给分）

一、计算下列各题：（7分×8=56分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{1+p}}$

2. 令$u=x-2\sqrt{y}$，$v=x+2\sqrt{y}$，以u，v作为新的自变量，变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

3. $u=\varphi(x+\psi(y))$，其中$\varphi(\cdot),\psi(\cdot)$有二阶导数.

证明$\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

4. 计算$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$.

5. 计算$\iint_D(x+y)\sin(x-y)dxdy$.　　$D=\{(x,y)|\ 0\le x+y\le\pi,\ 0\le x-y\le\pi\}$.

6. 计算曲线积分$\int_L\sqrt{x^2+y^2}dx+y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy$.

L：是曲线$y=\sqrt{x}+1$从A(1,2) 到 C(0,1)的一段.

7. 计算$\iint_\Sigma x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，$\Sigma$为$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$上侧.

8. 求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{2n}$的收敛区间及和函数.

二、（14分）

1. 举一个在$(-\infty,+\infty)$上定义的处处不连续函数.

2. 举一个在$(-\infty,+\infty)$上定义的只有在x=1是连续的函数.

3. 举一个在[0，1]上处处收敛的但不一致收敛的连续函数序列.

27

三、（10 分） $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续. 证明 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ 存在.

四、（10 分） $f(x)>0$，且 $f(x)$ 单调下降.

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(1)+f(2)+\cdots+f(n)-\int_1^n f(x)dx]$ 存在.

五、（10 分） $P_n(x)$ 在 $(a,b]$ 连续， $P_n(x)\geq 0$. $\int_a^b P_n(x)dx=1$ 在 $(a,b]$ 上广义可积，且对 $\delta>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{a+\delta}^b P_n(x)dx=0$. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)P_n(x)dx=f(a)$.