# 东华大学

## 2001年 硕士 学位研究生招生考试试题

## 科目：高等代数

（考生注意：答案须写在答题纸上。写在本试题上，一律不给分）

一、（16分）计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

二、（16分）$a,b$取何值时方程组

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases}$$

无解，有解，唯一解和无穷多解？在无穷多解时求出全部解，且求出这个解集合的一个极大线性无关组。

三、（16分）

（i）$U$为正交矩阵，求证$U$的伴随矩阵$U^*$为正交矩阵；

（ii）$A$为对称正定阵，求证必存在对称正定阵$S$，使$A=S^2$.

四、（16分）设$R^+$为全体正实数，加法和乘法定义如下：

$$a\oplus b=ab,\ k\circ a=a^k,\ a,b\in R^+,\ k\in R.$$

（i）验证$R^+$为实数域$R$上的线性空间。

（ii）求出$R^+$的基和维数。

五、（16 分）设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为秩是 n 的二次型且符号差为 1 。求证存在 $R^n$ 的一个 $\frac{1}{2}(n-1)$ 维子空间 $V_1$，使得对任何 $(x_1,\cdots,x_n)\in V_1$，有 $f(x_1,\cdots,x_n)=0$.

六、（20 分）设 $3\times 3$ 阶矩阵 $A$ 的特征值为 1，－1，2；$V=\{f(A)|\ f(x)=a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，n 为任意自然数，$a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 为任意实数}。试求线性空间 V 的基和维数。