东华大学

2002年 硕士 学位研究生招生考试试题

科目： 数学分析

(考生注意：答案须写在答题纸上。写在本试题上，一律不给分)

一、1.（5分）$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x})=$

2.（5分）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{f(x)}{\tan 2x})}{2^x-1}=5$，求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=$

3.（6分）$\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sin^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$

4.（6分）$x=\int_0^y\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}dt$，求$\frac{d^3y}{dx^3}-4\frac{dy}{dx}$.

5.（6分）判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\frac{n+1}{2}]}}{n}$的收敛性.

6.（6分）已知$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$，计算$\int_0^{\infty}x^4e^{-x^2}dx$.

二、（8分）$x>0$，$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$，求$\lim\limits_{x\to+0}\theta(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)$.

三、（10 分）若$f(x)$在$[a,b]$上可导，$f'(a)f'(b)<0$，证明存在$\xi\in(a,b)$，$f'(\xi)=0$.

四、（12分）已知$f(x)$在$[0,1]$上连续，求$\lim\limits_{x\to+\infty}x\int_0^1\frac{f(t)\arctan(xt)}{1+x^2t^2}dt$.

五、（12 分）已知$F(x,y)$在$[x_0-a,x_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]$上连续，$F(x_0,y_0)=0$，且对$x\in[x_0-a,x_0+a]$，$F(x,y)$作为$y$的函数是严格单调下降. 证明存在$\eta>0$，在$[x_0-\eta,x_0+\eta]$上定义的函数$y=\varphi(x)$满足：

1^0. $y_0=\varphi(x_0)$. 2^0. $F(x,\varphi(x))=0$，$x\in[x_0-\eta,x_0+\eta]$. 3^0. $y=\varphi(x)$连续.

（数学分析）

六、（12 分）证明 Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{m} & x=\dfrac{n}{m},\ (n,m)=1\\ 0 & x\notin Q.\end{cases}$$

在[0，1]上可积.

七、（12 分）$f_n(x)$为$[a,b]$上连续非负函数，$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=s(x)$在$[a,b]$连续.

证明$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛.