

东华大学

2002 年 硕士 学位研究生招生考试试题

科目: 高等代数

(考生注意: 答案须写在答题纸上。写在本试题上, 一律不给分)

一、(10 分) 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求 A^2, A^3, A^n (n 为自然数)。

二、(10 分) 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

三、(10 分) 设
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 = a_1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = a_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a_3 \end{cases}$$

(1) 证明这方程组对任意实数 a_1, a_2, a_3 都有解;

(2) 求出它的一切解。

四、(20 分) 试将实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2cx_1x_3$ 化为标准形, 求出变换矩阵; 并指出 a, b, c 满足什么条件, f 为正定二次型; 求证 f 为正定二次型时必存在正数 $\lambda > 0, \beta > 0$, 使

$$\lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \leq f(x_1, x_2, x_3) \leq \beta(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

高等代数

五、(20 分) 设 $T: R^3 \rightarrow R^3$ 为线性变换. 已知 $T(1,0,0) = (1,0,1)$,
 $T(0,1,0) = (2,1,1)$, $T(0,0,1) = (-1,1,-2)$.

(1) 求矩阵 A , 使 $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)A$;

(2) 设 $T(R^3) = B$, 求 B 的一组基;

(3) 求出满足 $Tx = 0$, $x \in R^3$ 的点 x 的全体.

六、(20 分) 设 V 为有限维欧氏空间, 内积记为 (α, β) . 设 T 为 V 的一个正交变换, 记 $V_1 = \{\alpha \mid T\alpha = \alpha\}$, $V_2 = \{\alpha - T\alpha \mid \alpha \in V\}$. 求证 $V = V_1 + V_2$.

七、(10 分) 设 A, B 为正交阵, 且 $\frac{|A|}{|B|} = -1$, 求证 $A+B$ 不可逆.