东华大学

2003 年 硕士 学位研究生招生考试试题

考试科目：数学分析

（考生注意：答案须写在答题纸上。写在本试题上，一律不给分）

一. 选择题（5 分×5=25 分）

1. $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$. 则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 可导的 [ ]

(A) 充分必要条件. (B) 充分条件但非必要条件.

(C) 必要条件但非充分条件. (D) 既非充分又非必要条件.

2. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 $f''(x)<0$. $A=f'(0)$, $B=f'(1)$, $c=f(1)-f(0)$. 则 [ ]

(A) A>B>C. (B) A>C>B. (C) C>A>B. (D) B>-C>A.

3. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 分段连续是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积的

(A) 充分必要条件. (B) 必要但非充分条件.

(C) 充分但非必要条件. (D) 既非充分又非必要条件.

4. $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，则 [ ]

(A) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$.

(B) $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$.

(D) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

3056

5. $y=f(x)$满足$y''+y'-e^{\sin x}=0$，$f'(x_0)=0$．则$f(x)$在 [ ]

(A) x_0的某领域中单调上升.

(B) x_0的某领域中单调下降.

(C) x_0取极小值.

(D) x_0取极大值.

二． 填充（5 分×5=25 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0} x[\sin\ln(1+\frac{3}{x})-\sin\ln(1+\frac{1}{x})]=$________________.

2. $\frac{d^2}{dx^2}\int_{x^2}^{0}\cos t^2 dt=$____________________.

3. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$是__________.（条件收敛，绝对收敛，发散）.

4. $R(x)=\begin{cases}\frac{1}{n} & x=\frac{m}{n},\ (n,m)=1 \\ 0 & x\text{无理数}\end{cases}$. $\lim\limits_{x\to 1}R(x)=$____________.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{1+p}}=$______________.

三．（8 分）举一个定义在$(-\infty,+\infty)$，在$x=0$，$x=1$是连续，但其余地方都不连续的函数例子.

四．（10 分）证明$[a,b]$上定义的单调增加函数$f(x)$一定在$[a,b]$上可积.

五．（10 分）设$u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,e^y,z)=0$，$y=\sin x$，其中f，φ有连续偏导数，且$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$．求$\frac{du}{dx}$.

 057

六.（10 分） $f(x)$ 在 x=0 领域中有二阶导数，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$.

证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

七.（12 分）求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

八.（15 分） $f_n(x)=nx(1-x)^n$，$n=1,2,\cdots$. 判别 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 在[0, 1]上是否一致收敛.

九.（15 分）计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dxdydz$，$\Omega$:由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 围成.

十.（10 分）计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^3-yz)dydz-2x^2ydzdx+zdxdy$，其中 Σ：由 $x+y+z=1$ 与三个坐标面围成的四面体表面的外侧.

十一.（10 分） $f(x)$ 在[0, 1]上连续. 证明存在 $\xi\in(0,1)$，使

$\int_0^{\xi} f(x)dx=(1-\xi)f(\xi)$.