东华大学

2003年 硕士 学位研究生招生考试试题

考试科目：高等代数

（考生注意：答案须写在答题纸上。写在本试题上，一律不给分）

一、（20分）设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&\alpha&\beta\\0&1&\alpha\\0&0&1\end{pmatrix}$，求$A^2$，$A^3$，$A^n$（n为自然数）.

二、（20分）计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}3&2&&&\\1&3&2&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&1&3&2\\&&&1&3\end{vmatrix}.$$

三、（20分）设$\begin{cases}4x_1+3x_2+2x_3+8x_4=a_1\\3x_1+4x_2+x_3+7x_4=a_2\\x_1+x_2+x_3+x_4=a_3\end{cases}$，

（1）证明方程组对任意实数a_1,a_2,a_3都有解；

（2）求出它的一切解.

四、（20分）试将实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+bx_2^2+ax_3^2+2cx_1x_3$化为标准型，求出变换矩阵，并指出$a,b,c$满足什么条件，$f$为正定二次型且这时存在正数$\lambda,\beta$，使

$$\lambda(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\le f(x_1,x_2,x_3)\le\beta(x_1^2+x_2^2+x_3^2).$$

五、（20分）设$T:R^3\to R^3$线性变换. 已知$T(1,0,0)=(1,0,1)$，$T(0,1,0)=(2,1,1)$，$T(0,0,1)=(-1,1,-2)$.

（1）求矩阵A，使$T(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)A$；

1059

高等代数

（2）设$T(R^3)=B$，求B的一组基；

（3）求出满足$TX=0,\ X\in R^3$的X的全体.

六、（20 分）设A,B为正交阵且$\frac{|A|}{|B|}=-1$，求证$A+B$不可逆.

七、（20 分）已知 3 阶矩阵A的特征值为 1，-1，2. 试将A^{2n}表成A的二次式.

八、（10 分）设V为有限维欧氏空间，内积记为(α,β). 设T为V的一个正交变换. 记$V_1=\{\alpha|\ T\alpha=\alpha\}$，$V_2=\{\alpha-T\alpha|\ \alpha\in V\}$.

求证$V=V_1\dotplus V_2$.

060