东华大学

2004 年 硕士 学位研究生招生考试试题

考试科目：数学分析

（考生注意：答案须写在答题纸上。写在本试题上，一律不给分）

一、 计算下列各题（7 分×6=42 分）：

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1}{1-\cos\sqrt{x-\sin x}}$；

2、$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{-x^2}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，求 $f'(0)$；

3、$z=xyf(e^x\sin y, x^2+y^2)$，其中 $f(\cdot,\cdot)$ 有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

4、$\int_1^3\sqrt{|x(x-2)|}dx$；

5、$S_D=A$，计算 $\oint_{\partial D^+}xdy-ydx$；

6、$\iint_D|\sin(x+y)|dxdy$，D：$0\le x\le\pi$，$0\le y\le\pi$。

二（10 分）、$x_0=\sqrt{7}, x_1=\sqrt{7-\sqrt{7}},\cdots,x_{n+2}=\sqrt{7-\sqrt{7+x_n}}\,(n\ge 1)$，求 $\lim x_n$。

三（12 分）、证明 $\int_0^\pi\dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx=\int_0^\pi\dfrac{\sin(2n-1)x}{\sin x}dx$，并计算它们的值。

四（12 分）、计算：$\int_0^1 dx\int_0^x e^{-x^2-y^2}dy+\int_1^{\sqrt{2}}dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}}e^{-x^2-y^2}dy$。

五（12 分）、$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 上有二阶导数，

证明：（1）存在 $\xi_1\in(0,1)$，$(1-\xi_1)f'(\xi_1)=f(\xi_1)$；

（2）存在 $\xi_2\in(0,1)$，$(1-\xi_2)f''(\xi_2)=2f'(\xi_2)$。

六（12 分）、计算 $\iint\limits_{\Sigma} z dS$，$\Sigma$： $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $x^2+y^2=2x$ 割下的部分。

七（10 分）、计算 $\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx,(b>a>0)$。

八（10 分）、$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，$f(a)=f(b)=0$，

$|f''(x)|\le M$，$x\in[a,b]$，

证明：$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{M}{12}(b-a)^3$。

九（10 分）、证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 条件收敛。

十（10 分）、证明在 (a,b) 上一致连续函数 $f(x)$ 一定可延拓为 $[a,b]$ 上连续函数。

十一（10 分）、

（1）举一个在 $[0,1]$ 的函数 $f(x)$，$|f(x)|$ 可积，而 $f(x)$ 不可积；

（2）举一个在 $[0,1]$ 上除 $x=\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ 外都不连续的函数；

（3）说明 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续。