东华大学

2004年硕士学位研究生招生考试试题

考试科目：高等代数

（考生注意：答案须写在答题纸上。写在本试题上，一律不给分）

一、（15分）

1、已知1326、2743、5005、3874都能被13整除，不计算 D=$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

的值，证明D也能被13整除；

2、设$D_n=\begin{vmatrix} 1 & -3 & & \\ 2 & 1 & -3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 2 & 1 \end{vmatrix}$，写出$D_n$关于$D_{n-1}$及$D_{n-2}$的递推公式，并由

数学归纳法证明$D_n=\dfrac{3^{n+1}-(-2)^{n+1}}{5}$。

二、（35分）

1、设A=$\begin{pmatrix} E & E \\ B & 2B \end{pmatrix}$，B=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求$A^{-1}$；

2、设A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，分别由分解$A=XY'$（X、Y均为列向量）

及$P^{-1}AP=\Lambda$（Λ为对角阵）求A^n，并说明上述P不可能为正交阵。

三、（13分）

1、设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$无关，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\beta_{n-1}=\alpha_{n-1}+\alpha_n$，

$\beta_n=\alpha_n+\alpha_1$，讨论$\beta_1,\cdots,\beta_n$的相关性；

2、设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$无关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$相关，证明$\alpha_1$不可由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$表示。

四、（20 分）

1、讨论当 p、q 取何值时$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + px_3 + 7x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = q \end{cases}$有解，并求对应解；

2、设$A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{n\times n}, R(A) = n$，证明若 AB=0，则 B=0。

五、（13 分）

1、设$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_2x_3$，讨论 t 的取值，使 f>0;

2、证明方阵$A > 0 \Leftrightarrow \exists U$可逆，使$A = U'U$。

六、（21 分）在 V=R^2上定义线性运算“$\oplus,\circ$：$\forall\alpha = (a_1,a_2),\beta = (b_1,b_2) \in V$,

$k \in R, \alpha \oplus \beta = (a_1b_1, a_2b_2), k \circ \alpha = (a_1^k, a_2^k)$”使 V 构成一线性空间

1、验证$\alpha_0 = (1,1)$为 V 中零元素及$\varepsilon_1 = (1,2), \varepsilon_2 = (2,1)$为 V 的一组基;

2、设$\eta_1 = (2,2), \eta_2 = (4,2)$，求$\varepsilon_1,\varepsilon_2$到$\eta_1,\eta_2$的过渡矩阵及$\alpha = (2,4)$分别在$\varepsilon_1,\varepsilon_2$与$\eta_1,\eta_2$下的坐标。

七、（15 分）设 V=$P_2[x]$，V 上线性变换 $\boldsymbol{A}$ 由 $\boldsymbol{A}f(x) = xf'(x)$ 定义

1、求 $\boldsymbol{A}$ 在 V 的基$\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = x, \varepsilon_3 = x^2$下的矩阵 A;

3、求$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$到$\eta_1 = 1 + x, \eta_2 = x + x^2, \eta_3 = 1 + x^2$的过渡矩阵 T，并由 T 求 $\boldsymbol{A}$ 在η_1,η_2,η_3下的矩阵 B。

八、（18 分）设 V=$P_2[x]$，在 V 上定义内积“（*，*）：$\forall f,g \in V$,

$(f,g) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(-1)g(-1)$”使 V 构成一 Euclid 空间

1、写出 V 的基$\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = x, \varepsilon_3 = x^2$的度量矩阵 A，并由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$求 V 的正交基$\eta_1,\eta_2,\eta_3$;

2、证明$\sigma(f) = (f(0), f(1), f(-1))$定义了$V \to R^3$的等距同构映射。

（注：这里“$f = 0 \Leftrightarrow f(0) = f(1) = f(-1) = 0$”。）