东华大学

2005 年 硕士 学位研究生招生考试试题

考试科目：数学分析

（考生注意：答案须写在答题纸上,写在本试题纸上,一律不给分）

一. 计算下列各题 (8 分×6=48 分)

1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)}{a^x-1}=2 \quad (a>0,\ a\neq 1).$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}.$

2. $y=\ln(x^2+2x-2).$ 求 $y^{(n)}.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+n)^2}\right].$

4. $\iint\limits_{\Sigma} z^2 ds, \qquad \Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2.$

5. $\oint\limits_C (y-e^x)dx+(3x+e^y)dy \qquad C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$ 逆时针方向.

6. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx.$

二.（12 分）$f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上存在二阶连续导数，$f(0)=0$，证明存在 $\xi\in(-a,a)$，$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx=\frac{f''(\xi)}{3}a^3$

三. （10 分）求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^{2n}$ 的收敛区间及和函数。

四．（10 分）判别$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$的收敛性。（发散，绝对收敛，条件收敛）

五．（12 分）$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx \quad (a>b>0)$

六．（12 分）$x_1=a,\ x_2=b,\ x_{n+1}=\frac{x_n+x_{n-1}}{2}(n\geq 2)$，求$\lim x_n$

七．（10 分）举一个在$[0,1]$上连续函数序列$f_n(x)$，满足$x\in[0,1]$，$\lim f_n(x)=f(x)$，$f(x)$在$[0,1]$上连续，但$f_n(x)$在$[0,1]$上不一致收敛于$f(x)$.

八．（12 分）计算$\oiint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，$\Sigma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$外侧。

九（12 分）$a_n(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$，一致收敛于$S(x)$，证明$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在$x=a,x=b$必收敛。

十．（12 分）叙述$f(x)$在$[a,b]$上可积的充要条件，并证明$[a,b]$上单调增加函数一定可积。