东华大学

2005 年硕士学位研究生招生考试试题

考试科目:高等代数

(考生注意:答案须写在答题纸上,写在本试题纸上,一律不给分)

一.(23 分)计算 n 阶行列式:

1. $D_n=\begin{vmatrix} a_1+x & x & \cdots & x \\ x & a_2+x & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & a_n+x \end{vmatrix}_{(n)}$ $(a_1\cdots a_n\neq 0)$;

2. $D_n=\begin{vmatrix} b & c & & \\ a & b & c & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & a & b \end{vmatrix}_{(n)}$ $(x^2-bx+ac=(x-\alpha)^2)$.

二.(37 分)讨论 A=$(a_{ij})_{n\times n}\geq 0$的性质及分解问题:

1. 当 A>0 时证明A^{-1}>0,并说明可做三角分解 A=$LL'(L=\begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix})$

想法的合理性及验证$l_{11}=\sqrt{a_{11}},l_{kk}=\sqrt{\frac{|A_k|}{|A_{k-1}|}}$($A_k$为 A 的 k 阶顺序主子矩阵,$k=2,\cdots,n$)(提示:设 L=$\begin{pmatrix} L_k & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$);

2.设 A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,求 U 使 A=$U^2$ (注意这里 A≥0).

三.(20 分)已知齐次线性方程组 AX=0(*)(A=$(a_{ij})_{m\times n}$)的基础解系含 r 个向量⇔R(A)=n-r,由此

1.当 A=$(a_{ij})_{m\times n}$,B=$(b_{ij})_{m\times n}$且 R(A)<$\frac{n}{2}$,R(B)< $\frac{n}{2}$时,证明存在 C=$(c_{ij})_{n\times s}\neq 0$,使(A+B)C=0;

2.当$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}$时,求 A 使$\eta_1,\eta_2$为(*)的基础解系.

四.(25 分)设 V={全体正实数},在 V 上定义线性运算

$\oplus,\circ:\forall a,b\in V,k\in R,a\oplus b=ab,k\circ a=a^k$,则 V 构成一线性空间

1.指出 V 的零元素及$a\in$V 的负元素(需说明理由);

2. 若$W=V^2=\{(a,b)|a,b\in V\}$,定义 W 上的线性运算使 W 构成一线性空间并求 W 的一组基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$与 W 的维数:需说明

(1)W 的零元素 (2)$(l+k)\circ\alpha=l\circ\alpha\oplus k\circ\alpha$ (3)$k\circ(\alpha\oplus\beta)=k\circ\alpha\oplus k\circ\beta$

(4)$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$线性无关且$\forall\alpha\in$W 可由$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$线性表示.

五.(25 分)1.设 AX=0(*)(A=$(a_{ij})_{m\times n}$),V={$X|$AX=0}(为一线性空间),当R(A)=r<n 时简述(*)基础解系的导出过程并指出 V 的维数;

2.设Y'=A(t)Y(**)($A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n},a_{ij}(t)$在[a,b]上连续),

W={Y|Y'=A(t)Y}(为一线性空间), 由 1 的思路证明 W 为 n 维线性空间(提示:由已知对$t\in$[a,b], $\alpha_0\in R^n$给定,(**)存在唯一解 Y 满足

Y(t)=α_0,证明对$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\varepsilon_n=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$,取$Y_i\in$W 使满足$Y_i(t)=\varepsilon_i(i=1,\cdots,n)$,

则$Y_1,\cdots,Y_n$为 W 的基).

六.(20 分)设 V 为 n 维 Euclid 空间,$\mathscr{A}$为 V 上线性变换,证明

1.若$\mathscr{A}$在 V 的标准正交基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵为正交阵,则$\mathscr{A}$保范;

2 若$\alpha\in(\mathscr{A}^2)^{-1}(0)\setminus\mathscr{A}^{-1}(0)$,M=L($\mathscr{A}\alpha$)={k$\mathscr{A}\alpha|k\in R$},$\beta\in M^\perp\cap\mathscr{A}^{-1}(0)$且$\beta\neq0$,

则$\alpha,\mathscr{A}\alpha,\beta$线性无关.