12:25　2:20-5:20

东华大学

2006 年 硕士 学位研究生招生考试试题

考试科目：高等代数

（考生注意：答案须写在答题纸上，写在本试题纸上，一律不给分）

一、（15 分）计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1+x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1+(n-1)x & 1 \\ 1+nx & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$ （$n\geq 2$）

（计算中可记 $u=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$）。

二、（25 分）讨论线性方程组 $\begin{pmatrix} 2 & a & \cdots & a \\ a & 2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$ （n 为偶数）

当 a 在什么范围取值时有解，并求对应全部解（当有无穷多解时将解表示成方程的特解与对应齐次方程基础解系的组合形式）。

三、（10 分）设 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，其中 A、B、C、D 均为 n 阶方阵，A 可逆，

讨论 M 的求逆问题：给出 M 可逆的充分条件（计算中所需要的），并当 M 满足这一条件时求 M 的逆矩阵（由 A、B、C、D 来表示）。

四、（22 分）设 A、B、C 均为 n 阶方阵，秩(A)=r，秩(B)=s，

1、证明 秩$(A+B)\leq$r+s 及 秩$(AB)\leq\min\{$r，s$\}$；

2、若 $M=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$，证明 秩$(M)\geq$r+s，

并指出两不同的使此不等式取等号的充分条件。

共2页 第1页

五、(20分)

1、当 $f(X)=X'AX$ 中A为n阶实对称阵且 $\forall X\in R^n, f(X)\geq 0$ 时 $A\geq 0$，

证明若 $A\geq 0$，则 $\exists B\geq 0$ 使 $B^2=A$；

2、对 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$\mathrm{tr}(A)=a_{11}+\cdots+a_{nn}$，

证明当A、B为同阶方阵时 $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ 及 $\mathrm{tr}(AA')\geq 0$；

3、证明当 P≥0，Q≥0 时 $\mathrm{tr}(PQ)\geq 0$。

六、(20分)设 V={全体x的不超过2次多项式}，

V上线性变换 $\mathcal{A}$ 由 $\mathcal{A}f(x)=xf'(x)$ 定义，

1、求 $\mathcal{A}$ 在V的基 $\varepsilon_1=1,\varepsilon_2=x,\varepsilon_3=x^2$ 下的矩阵A及 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到V的另一组基 $\eta_1=1+x,\eta_2=x+x^2,\eta_3=1+x^2$ 的过渡矩阵T，

并由A、T求 $\mathcal{A}$ 在 η_1,η_2,η_3 下的矩阵B；

2、求 $\mathcal{A}$ 的特征值与特征向量（由“1”中 η_1,η_2,η_3 表示）

（提示：由A求特征值，由B求特征向量）。

七、(20分)设由标准正交化法将Euclid空间V的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 变为标准正交基 $\varepsilon_1=a_{11}\alpha_1,\varepsilon_2=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2,\cdots,\varepsilon_n=a_{1n}\alpha_1+\cdots+a_{nn}\alpha_n$，写出 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 到 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 的过渡矩阵A，并由 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 到 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的过渡矩阵T证明若 $G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=((\alpha_i,\alpha_j))_{n\times n}$ 为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的度量矩阵，则其行列式 $|G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)|\leq|\alpha_1|^2\cdots|\alpha_n|^2$，且取等号的充分必要条件为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 两两正交（这里对 $\alpha\in V$，(α,α) 表示 α 的内积，而 $|\alpha|^2=(\alpha,\alpha)$）。

八、(18分)设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$，求T可逆使 $T^{-1}AT=J$ 为Jordan标准形，并由此结果求 A^n（直接计算不给分）及 e^A。