上海大学 2001 年线性代数考研试题

一、计算行列式

$$\begin{vmatrix} x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

二、设 A 为 3 阶非零方阵，且 $A^2=0$

求证存在 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 $A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$

求方程组 $AX=0$ 的基础解系

三、用正交线性替换化二次形 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+3x_2^{\ 2}+2x_3^{\ 2}-4x_1x_3-4x_2x_3$ 为标准形

四、设 A 为 $n\times m$ 阶实矩阵，且 $r(A)=m \quad (n\ge m)$，若 $(AA^{'})^2=aAA^{'}$.求证 $A^{'}A=aE_m$

（E_m 为 m 阶单位矩阵，$A^{'}$ 为 A 的转置阵，$r(A)$ 表示 A 的秩）（10%）

五、设 A 是 n（n 为奇数）维线性空间 V 上的线性变换，若 $A^{n-1}\ne 0$，$A^n=0$。求证：存在 $\alpha\in V$，使 $\alpha+A\alpha$，$A\alpha+A^2\alpha$，…，$A^{n-2}\alpha+A^{n-1}\alpha$，$A^{n-1}\alpha+\alpha$ 为 V 的一组基，并求 A 在此组基下的矩阵。

六、设 A 是欧式空间 V 上对称变换。(即 A 是 V 上线性变换，且（$A\alpha$，β）=（α，$A\beta$），$\forall\alpha$，$\beta\in V$）。求证：对任意 $\alpha\ne 0$，都有（$A\alpha$，α）<0 的充分必要条件是 A 的所有特征值都小于 0.

七、设 $B=\begin{pmatrix} -A & \alpha \\ \alpha^{'} & \beta \end{pmatrix}$，其中 A 为 n 阶负定矩阵，α 为 n 维列实向量，β 为实数。求证 B 正定充分必要条件是 $\beta+\alpha^{'}A^{-1}\alpha>0$

八、若 A 是正交阵，且 $-A$ 特征值为 1 的重数是 S。

求证：$|A|=(-1)^S$ （$|A|$ 表示 A 对应的行列式）