

上海大学 2002 年数学分析考研试题

一、求 α 和 β 使得当 $x \rightarrow +\infty$ 时小量 $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}$ 等价于无穷小量 αx^β

二、求椭圆 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ 所围成的面积 S ，其中 $A > 0, AC - B^2 > 0, A, B, C$ 均为常数。

三、试给出三角级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 中系数的计算公式（不必求出具

体数值），使得该级数在 $[0, 1]$ 上是一致收敛到 x^2 ，并说明理论根据。

四、证明 $f(x) = \begin{cases} e^x \sin x, & \text{当 } |x| \leq \pi \text{ 时} \\ \sqrt{|x| - \pi}, & \text{当 } |x| > \pi \text{ 时} \end{cases}$ 函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续。

五、设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续的导函数 $f'(x)$ ， $f(0)=0$ 证明：

$$\int_0^1 f^2(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'^2(x) dx.$$

六、证明当 $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ 时有不等式：

$$(x^2 - y^2)^2 \leq 2 + y^2 - x^2$$

七 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续，并且是一一对一（即当 $x_1, x_2 \in (a, b)$ ，且 $x_1 \neq x_2$ 时有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ ），证明 $f(x)$ 在 (a, b) 上是严格单调