华 东 师 范 大 学

一九九七年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：数学分析

专 业：

共二页

一.（12分）设 $f(x)$ 是区间 I 上连续函数. 证明：若 f 为一一映射，则 $f(x)$ 在区间 I 上严格单调.

二.（12分）设

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$$

证明：若 $f(x)$、$D(x)f(x)$ 在点 $x=0$ 处都可导，且 $f(0)=0$，则 $f'(0)=0$.

三.（16分）考察函数 $f(x)=x\ln x$ 的凸性，并由此证明不等式：

$$a^a b^b \geqslant (ab)^{\frac{a+b}{2}} \quad (a>0,\ b>0).$$

四.（16分）设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\sqrt{n}$ 收敛. 试就 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数和一般项级数两种情形分别证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\sqrt{n+\sqrt{n}}$ 也收敛.

五.（20分）设方程 $F(x,y)=0$ 满足隐函数定理条件，并由此确定了隐函数 $y=f(x)$. 又设 $F(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数.

（1）求 $f''(x)$.

（2）若 $F(x_0,y_0)=0$，$y_0=f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极值，试证明：

当 $F_y(x_0,y_0)$ 与 $F_{xx}(x_0,y_0)$ 同号时，$f(x_0)$ 为极大值；

当 $F_y(x_0,y_0)$ 与 $F_{xx}(x_0,y_0)$ 异号时，$f(x_0)$ 为极小值.

（3）对方程 $x^2+xy+y^2=27$，在隐函数形式下（不解出 y）求 $y=f(x)$ 的极值，并用（2）的结论判别极大或极小.

六.（12分）改变累次积分

$$I=\int_2^4 dx\int_{\frac{4}{x}}^{\frac{4x-20}{x-8}}(y-4)\,dy$$

的积分顺序，并求其值.

七.（12分）计算曲面积分

$$I=\iint\limits_S (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,dS.$$

其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上介于 $0\le z\le h$ 的一块，$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 为 S 的下侧法向的方向余弦.