华 东 师 范 大 学

一九九八年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：高等代数

专　　业：基础数学，计算数学，应用数学，运筹学与控制论，学科教学论，控制论与智能系统，概率论与数理统计

共 2 页

*（学科教学论考生：八、九题不必做；其它学科六、七题不必做）。

一、计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2^n-2 & 2^{n-1}-2 & \cdots & 2^3-2 & 2 \\ 3^n-3 & 3^{n-1}-3 & \cdots & 3^3-3 & 6 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ n^n-n & n^{n-1}-n & \cdots & n^3-n & n^2-n \end{vmatrix}$$

（10分）

二、证明：方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases} \quad (1)$$

的解全是方程 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ (2) 的解的充分必要条件是 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，其中 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$ $(i=1,2,\cdots,s)$。 （15分）

三、设 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 是整系数多项式

证明：若 $ac+bc$ 为奇数，则 $f(x)$ 在有理数域上不可约。 （15分）

四、设 A 是非奇异实对称矩阵，B 是反对称实方阵，且 $AB=BA$

证明：$A+B$ 必是非奇异的。 （15分）

五、设 A 为 n 阶方阵，$f(\lambda)=|\lambda E-A|$ 是 A 的特征多项式，并令

$$g(\lambda)=\frac{f(\lambda)}{(f(\lambda),f'(\lambda))},$$ （$f'(\lambda)$ 指为 $f(\lambda)$ 的一阶微商）。

证明：A 与一个对角矩阵相似的充要条件是 $g(A)=0$。 （15分）

六(*) 假设 $\mathcal{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 的线性变换，$\mathcal{A}^*$ 是同一空间 V 的变换，且对 $\forall \alpha, \beta \in V$ 有 $(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}^*\beta)$。

证明：1. $\mathcal{A}^*$ 是线性变换。

2. $\mathcal{A}$ 的核等于 $\mathcal{A}^*$ 的值域的正交补。 (15分)

七(*) 证明：任意方阵可表为两个对称方阵之积，其中一个是非奇异的。 (15分)

八. 设 $f(x)$ 为数域 P 上多项式，且有 $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$，$(f_1(x), f_2(x)) = 1$。又设 V 为 P 上 n 维线性空间，$\mathcal{A}$ 为 V 的一个线性变换，K 为 $f(\mathcal{A})$ 的核，W_1 为 $f_1(\mathcal{A})$ 的核，W_2 为 $f_2(\mathcal{A})$ 的核。

证明：$K = W_1 \oplus W_2$。 (15分)

九. 设 $a+b\sqrt{-1}$ 是 n 阶实方阵 A 的任一特征值，a, b 是实数，如 $A+A'$ 的 n 个特征值是 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$。

证明：必有 $\frac{1}{2}\min\limits_i \mu_i \le a \le \frac{1}{2}\max\limits_i \mu_i$。（$A'$ 是 A 的转置矩阵）。 (15分)

* 注意：考学科数学的考生，八，九题不必做。
其它学科考生六，七题不必做。