华东师范大学

一九九九 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：数学分析

招生专业：

一.（15分） 设 $a>0$，$0<x_1<a$，$x_{n+1}=x_n\left(2-\frac{x_n}{a}\right)$，$n\in\mathbb{N}$。证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

二.（10分） 证明：若函数 f 在区间 I 上处处连续，且为一一映射，则 f 在 I 上必为严格单调.

三.（15分） 用条件极值方法证明不等式：

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}\geqslant\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2,\quad (x_k>0,\ k=1,2,\cdots,n).$$

四.（15分） 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$. 证明：$f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上不一致连续.

五.（15分） 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(x)\geqslant 0$，$f''(x)<0$. 证明：

$$f(x)\leqslant\frac{2}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt,\quad x\in[a,b].$$

六.（15分） 设 $f(x,y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上有二阶连续偏导数.

(1) 通过计算验证：$\iint\limits_D f''_{xy}(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_D f''_{yx}(x,y)\,dx\,dy$；

(2) 利用 (1) 证明 $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$，$(x,y)\in D$.

注意：学科教学论专业的考生可在以下七、八两题中任选一题（且只选一题）；其他专业的考生只限于做第七题（第八题不必做）.

七.（15分）设对每一n，$f_n(x)$在$[a,b]$上有界，且当$n\to\infty$时 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$，$x\in[a,b]$. 证明：

(1) $f(x)$在$[a,b]$上有界；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{a\le x\le b} f_n(x)=\sup\limits_{a\le x\le b} f(x)\ \left(=\sup\limits_{a\le x\le b}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)$.

八.（15分）设$S\subset\mathbb{R}^2$，$P_0(x_0,y_0)$为S的内点，$P_1(x_1,y_1)$为S的外点. 证明：直线段P_0P_1必与S的边界∂S至少有一交点