

华东师范大学

二〇〇〇 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目: 高等数学(B)

招生专业:

注: (1) 正切函数、余切函数表示为 $\tan x$ 、 $\cot x$. (2) 第一、二大题的结果直接写在答题纸上.

一、填空题 (每小题3分, 共10小题30分.)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x+3x^2}-1}{\sin 2x} =$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+n}} \right) =$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x =$

4. 设 $y = [g(x)]^{x+1}$ (其中 $g(x) > 0$ 是可微的), 则 $dy =$

5. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\ln(x^2 + y) = x^2 y + \tan x$ 确定的. 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$

6. 设 $f(x, y, z) = x + y + z$, 其中 $z = z(x, y)$ 是由方程 $xyz = x + y + z$ 所确定的, 则 $f'_x(-1, 1, 0) =$

7. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 8} =$

8. $f(x)$ 有一个原函数为 $\frac{\sin x}{x}$, 则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f'(x) dx =$

9. $\int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx =$

10. 微分方程 $xy \frac{dy}{dx} - 2y^2 + x^2 = 0$ 的通解是

二、单项选择题 (每小题3分, 共10小题30分.)

1. 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $g[f(x)]$

(A) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0 \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0 \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0 \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0 \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+4} \right)^x =$

(A) e^{-6} (B) e^6 (C) e^{-3} (D) e^3

3. $f(x) = \begin{cases} 2^{-(x^{-2})}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处

(A) 不连续, 不可导 (B) 不连续, 可导 (C) 连续, 不可导 (D) 连续, 可导

4. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x - \tan x$ 与 x^n 同阶, 则 $n =$ _____.
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
5. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{4n}}$, 关于 $f(x)$ 的间断点的结果是 _____.
 (A) 无间断点 (B) 有间断点 $x = 1$ (C) 有间断点 $x = 0$ (D) 有间断点 $x = -1$
6. 累次积分 $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy =$ _____.
 (A) $\int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y) dx$ (B) $\int_0^1 dy \int_0^{1-x} f(x, y) dx$
 (C) $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$ (D) $\int_0^{1-x} dy \int_0^1 f(x, y) dx$
7. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2}$ 的收敛区域是 _____.
 (A) $(-1, 1]$ (B) $[-1, 1)$ (C) $[-1, 1]$ (D) $(-1, 1)$
8. 曲面 $e^z - z + xy = 3$, 在 $(2, 1, 0)$ 处的切平面方程是 _____.
 (A) $2x + y - 4 = 0$ (B) $x + 2y - 4 = 0$ (C) $x - 2y + 4 = 0$ (D) $x + 2y + 4 = 0$
9. 设有参数方程 $\begin{cases} x = \sin t - t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____.
 (A) $-\frac{1}{(1 - \cos t)^2}$ (B) $\frac{1}{(1 - \cos t)^2}$ (C) $-\frac{1}{1 - \cos t}$ (D) $\frac{1}{1 - \cos t}$
10. 由麦克劳林级数的展开式, 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$ 的 x 幂级数展开式为 _____.
 (A) $1 + \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}x^2 + \dots$ (B) $1 - \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}x^2 - \dots$
 (C) $1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \dots$ (D) $1 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + \dots$

三、(本题7分) 求由曲线 $y = \arctan x$, $(x \geq 0)$ 与 $x = 1$ 及 x 轴围成的平面图形绕 y 旋转一周所得的体积.

四、(本题8分) 求 $\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ 的特解.

五、(本题8分) 计算二重积分 $\iint_D y dx dy$, 其中 D 是由直线 $x = -2$, $y = 0$, $y = 2$ 以及曲线 $x = -\sqrt{2y - y^2}$ 所围成的平面区域.

六、(本题10分) 设 $y = \frac{\ln x}{x}$, 列表讨论:

1. 函数的单调增减区间及极值;
2. 函数图形的上凸、下凸区间及拐点;
3. 函数图形的渐近线方程并作草图.

七、(本题7分) 设非负连续函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, $a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx$ ($n = 1, 2, \dots$), 证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.