# 华东师范大学

二〇〇〇 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目： 数学分析

专　　业：

研究方向：

注意事项：答卷封面需填写自己的准考证号码与试题一并交上。



一.（24 分）计算题：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$；

(2) $\displaystyle\int \frac{\cos x\cdot \sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx$；

(3) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程

$$F(xyz,\ x^2+y^2+z^2)=0$$

所确定的可微隐函数，试求 $\operatorname{grad} z$.

二.（14 分）证明：

(1) $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+n}\right\}$ 为递减数列；

(2) $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$, $n=1,2,\cdots$.

三.（12 分）设 $f$ 在 $[a,b]$ 中任意两点之间都具有介值性，而且 $f$ 在 $(a,b)$ 内可导，$|f'(x)|\le K$（正常数），$x\in(a,b)$. 证明 $f$ 在点 $a$ 右连续（同理在点 $b$ 左连续）.

四.（14分） 设 $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx$. 证明:

(1) $I_n=\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$, $n=2,3,\cdots$;

(2) $I_n\geqslant\frac{2}{3\sqrt{n}}$, $n=1,2,3,\cdots$.

五.（12分） 设S为一旋转曲面，由平面光滑曲线 $\begin{cases} z=0, \\ y=f(x), x\in[a,b] \end{cases}$ $(f(x)\geqslant 0)$

绕x轴旋转而成. 试用二重积分计算曲面面积的方法，导出S的面积公式为

$$A=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

(提示：据空间解几知道S的方程为

$$y^2+z^2=f^2(x).)$$

六.（24分）级数问题:

(1) 设 $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$, 求 $f^{(k)}(0)$.

(2) 设 $\sum\limits_{n=1}^{n}a_n$ 收敛, $\lim\limits_{n\to\infty}n a_n=0$, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

(3) 设 $\{f_n(x)\}$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数序列，且

$$f_n(x)\rightrightarrows f(x),\ x\in[a,b].$$

证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无零点，则当 $n$ 充分大时 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上也无零点；并有

$$\frac{1}{f_n(x)}\rightrightarrows\frac{1}{f(x)},\ x\in[a,b].$$