

2001年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目: 高等数学(B)

招生专业:

注: 将第一、二大题的结果直接写在答题纸上, 不要写在本试题纸上.

一、单项选择题 (每小题3分, 共10小题30分.)

1. 设 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的_____.
(A) 可去间断点 (B) 不能确定 (C) 第二类间断点 (D) 连续点
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2}{x^2 + 2} \right)^{x^2 - 2} =$ _____.
(A) e^{-2} (B) e^{-4} (C) e^{-6} (D) e^{-8}
3. $f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{\tan x}{x} & x \neq 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处_____.
(A) 不连续, 不可导 (B) 连续, 不可导 (C) 连续, 可导 (D) 不能确定
4. 设 $z = \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{1}{z}}$, 则 $dz|_{(1,1,1)} =$ _____.
(A) $-dx - dy$ (B) $dx + dy$ (C) $-dx + dy$ (D) $dx - dy$
5. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小量 $f(x) = \int_0^{x^2} \arcsin t^2 dt$ 是 x^n 的同阶无穷小量, 则 $n =$ _____.
(A) 6 (B) 4 (C) 2 (D) 1
6. 积分 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{3x\sqrt{\ln^3 x}} =$ _____.
(A) $\frac{3}{2\sqrt{\ln 3}}$ (B) $-\frac{2}{3\sqrt{\ln 3}}$ (C) $\frac{2}{3\sqrt{\ln 3}}$ (D) $-\frac{3}{2\sqrt{\ln 3}}$
7. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ln(1 + \frac{1}{n})$ 是_____.
(A) 绝对收敛 (B) 条件收敛 (C) 发散 (D) 不能确定
8. 曲面 $\arctan \frac{x}{y} - z = 0$, 在 $(1, 1, \frac{\pi}{4})$ 处的法线方程是_____.
(A) $-2(x-1) + 2(y-1) + z - \frac{\pi}{4} = 0$ (B) $-2(x-1) = 2(y-1) = \frac{\pi}{4} - z$
(C) $2(x-1) = -2(y-1) = z - \frac{\pi}{4}$ (D) $-2(x-1) = 2(y-1) = z - \frac{\pi}{4}$
9. 微分方程 $x^2 y' - xy + y^2 = 0$, $y(1) = 1$ 的解是_____.

- (A) $-\frac{x}{\ln x + 1}$ (B) $\frac{\ln x + 1}{x}$ (C) $\frac{x}{\ln x + 1}$ (D) $-\frac{\ln x + 1}{x}$
10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3 + \sin^2 x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (A) $4 \ln 3$ (B) $-4 \ln 3$ (C) $-\frac{1}{4} \ln 3$ (D) $\frac{1}{4} \ln 3$

二、填充题 (每小题3分, 共10小题30分.)

1. 设 $g(x) = 1 + x$, 且当 $x \neq 0$ 时, $f(g(x)) = \frac{1-x}{x}$, 则 $f(\frac{1}{2}) = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x} = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{\sqrt{|xy|}}{|x| + |y|} \right)^{|x| + |y|} = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 设 $y = (\ln x)^{e^x}$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=e} = \underline{\hspace{2cm}}$.
5. 设 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = t^2 + 4t \end{cases}$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.
6. 设 $z = f\left(\frac{x}{y}, x - y\right)$, 其中 $f(u, v)$ 是二阶可微函数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.
7. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n}$ 的收敛域是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
8. $\int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.
9. 幂级数 $x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \dots + nx^{n+1} + \dots$ 的和函数与收敛域是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
10. 微分方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} - 3y = e^{-x}$ 的通解是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、(本题10分) 设 $y = \frac{x^2 - 2}{2x^2} - \frac{1}{x}$, 回答以下问题: (结果均写在答题纸上).

1. 函数的极小值 $\underline{\hspace{2cm}}$, 极大值 $\underline{\hspace{2cm}}$;
2. 函数的单调递减区间 $\underline{\hspace{2cm}}$, 向下凸区间 $\underline{\hspace{2cm}}$;
3. 拐点 $\underline{\hspace{2cm}}$;
4. 渐近线方程 $\underline{\hspace{2cm}}$;
5. 作出草图 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、(本题12分) 求由曲线 $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 与 x 轴、 y 轴所围图形的周长与面积.

五、(本题10分) 计算球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$ 被曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 所分成两部分的体积之比.

六、(本题8分) 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内取得最大值, 在 $[a, b]$ 上具有二阶导数且 $|f''(x)| \leq K, x \in [a, b]$, K 是某常数, 证明 $|f'(a)| + |f'(b)| \leq K(b-a)$.