华 东 师 范 大 学

2001年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：数学分析

招生专业：

一.（30分）简单计算题：

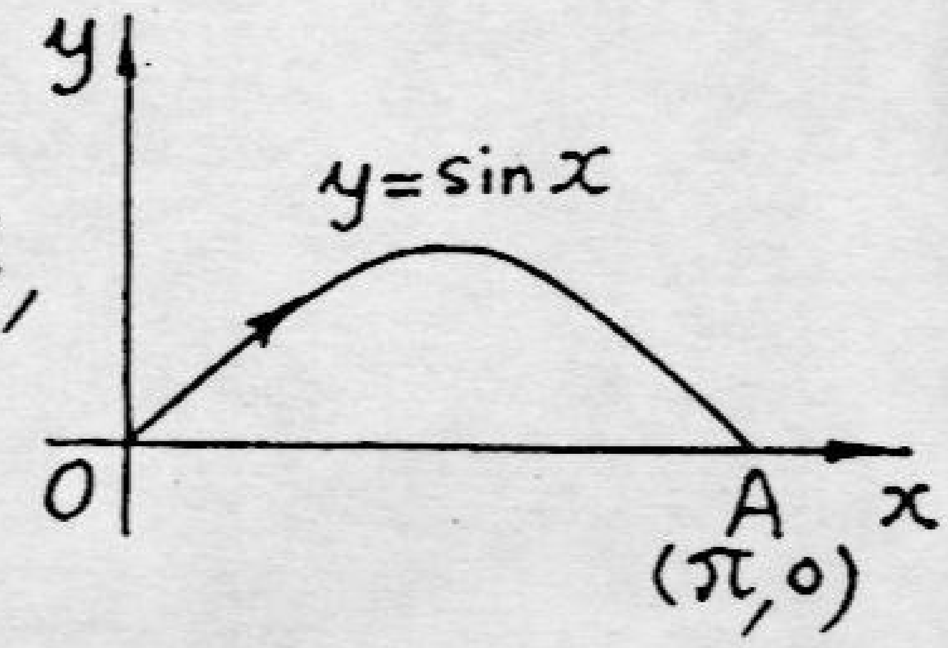
1）验证：当 $x\to+\infty$ 时，$2x\int_0^x e^{t^2}dt$ 与 e^{x^2} 为等价无穷大量。

2）求不定积分 $\int \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$．

3）求曲线积分

$$I=\int_{\overset{\frown}{OA}}(y^2-\cos y)dx+x\sin y\,dy,$$

其中有向曲线 $\overset{\frown}{OA}$ 如图所示．



4）设 f 为可微函数，$u=f(x^2+y^2+z^2)$ 和方程

$$3x+2y^2+z^3=6xyz.\cdots\cdots\cdots(*)$$

试对以下两种情形，分别求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 在点 $P_0(1,1,1)$ 处的值：

(i) 由方程(*)确定了隐函数 $z=z(x,y)$；

(ii) 由方程(*)确定了隐函数 $y=y(x,z)$．

二.（12分）求由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 与锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 所围立体的体积．（$z\geq0$）

三.（12分）证明：若函数 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 内可导，但无界，则其导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内亦必无界.

四.（12分）证明：若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

亦必绝对收敛.

五.（17分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(1)=0$.
证明：
1) $\{x^n\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛；
2) $\{f(x)x^n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

六.（17分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上无界.
证明：
1) $\exists \{x_n\}\subset[a,b]$，使 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$，
2) $\exists\, c\in[a,b]$，使得：$\forall\,\delta>0$，$f(x)$ 在 $(c-\delta, c+\delta)\cap[a,b]$ 上无界.

（若能用两种不同方法证得 2)，奖励5分）