华 东 师 范 大 学

2002年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：数学分析

招生专业：

一. (12 分) 计算：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+\sin(n^2)}{2n^2+n-100}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{e^{x^2}-1}-\dfrac{1}{x}\right)$;

3. 设 F 为 R^3 上的可微函数，由方程 $F(xy,yz^2,zx^3)=0$ 确定了 z 为 x 与 y 的函数，求 z_x, z_y 在点 $(1,1)$ 的值。

二. (15 分) 设函数 f,g 均在 (a,b) 内有连续导数，且对于任何 $x\in(a,b)$，有 $F(x)=f'(x)g(x)-g'(x)f(x)>0$，求证：

1. f,g 不可能有相同的零点；

2. f 的相邻零点之间必有 g 的零点；

3. 在 $f(x)$ 的每个极值点 $x_0\in(a,b)$，存在 x_0 的某邻域，使得 $g(x)$ 在该邻域中是严格单调的。

三. (15 分) 设初始值 $a_1\in R$ 给定，用递推公式 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n^3}{1+a_n^4}$ $(n=1,2,\cdots)$ 得到数列 $\{a_n\}$。

1. 求证数列 $\{a_n\}$ 收敛；

2. 求 $\{a_n\}$ 所有可能的极限值；

3. 试将实数轴 R 分成若干个小区间，使得当且仅当在同一区间取初始值，$\{a_n\}$ 都收敛于相同的极限值。

四. (12 分) 设 $a > c > 0$, 求椭球体 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的表面积。

五. (18 分) 设数列 $\{a_n\}$ 有界但不收敛，求证：

1. 对于任何 $x>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ 收敛;

2. 对于任何 $\delta>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛。

六. (12 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，求证：

$$\lim_{x\to 0^+}\int_0^1 \frac{xf(t)}{t^2+x^2}dt=\frac{\pi}{2}f(0).$$

七. (16 分) 设函数 f 在 $[0,a]$ 上严格递增，且有连续导数，$f(0)=0$。设 g 是 f 的反函数，求证：

1. 对于任何 $x\in[0,a]$，都有

$$\int_0^{f(x)}(x-g(u))du=\int_0^x f(t)dt;$$

2. 当 $0\le x\le a,\ 0\le y\le f(a)$ 时，下列不等式成立：

$$xy\le\int_0^x f(t)dt+\int_0^y g(u)du,$$

其中当且仅当 $y=f(x)$ 时，等式成立。