

2002 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目: 量子力学

招生专业: 理论物理, 光学, 凝聚态物理, 生物物理学, 课程与教学论(物理学科), 无线电物理。

一、(本题中每小题 10 分, 共 20 分)

(1) 设一个粒子在一维无限深势阱中运动, 势阱的宽度为 a , 如果粒子的状态由波函数 $\Psi(x) = Ax(a-x)$ 描写。其中 A 为归一化常数。求粒子能量的概率分布和能量的平均值。(2) 设 $t=0$ 时, 粒子的状态为 $\Psi(x) = A(\sin^2 kx + \frac{1}{2} \cos kx)$, 求此时粒子动量的平均值和能量平均值。

$$\left[\sum_{1, 3, 5, \dots} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{96} \cdot \pi^4 \right]$$

二、(本题中第 1 小题 5 分, 第二小题 15 分, 共 20 分)

一个三维希尔伯特空间中的物理系统, 其哈密顿算符为

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \hbar \omega.$$

(1) 求出 H 的本征态 u_1, u_2, u_3 (2) 设在 $t=0$ 时刻态函数 $\psi(0)$ 为 $\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} u_1 + \frac{1}{2} u_2 + \frac{1}{2} u_3$ 问在该态中测量能量时会得到哪些可能值? 相应的概率是多少? 能量的平均值 $\langle H \rangle$ 和涨落 $\langle (\Delta H)^2 \rangle$ 分别又是多少?

三、(本题中每小题 10 分, 共 20 分)

(1) 证明: $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)^2 = 3 - 2(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$, 并利用此结果, 求 $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$ 的本征值。(2) 证明: $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)^n$ 与 $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$ 线性相关, 求出这一相关性的具体表示式, 并说明 (1) 是这一相关性的特例。

四、(本题中每小题 10 分, 共 20 分)

(1) 一个质量为 M 的非相对论粒子在三维势场 $V = \frac{1}{2} M \omega^2 (X^2 + Y^2 + Z^2 + \lambda XY)$ 中运动。将 λ 看作小参数, ①计算基态能量到二阶微扰。②用一阶简并微扰计算第一激发态能级的分裂。对一维线性谐振子有 $E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$, $n=0, 1, 2, \dots$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

$$\hat{a}\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1}$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

$$\hat{a}^\dagger\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}$$

(2) 电荷为 q 的线性谐振子在时间 $t = 0$ 时处于基态, $t > 0$ 时处于

$\varepsilon = \varepsilon_0 \exp(-\frac{t}{\tau})$ 的电场中, (ε_0, τ 为常数) 求谐振子处于各个激发态

的概率, 并讨论 t 很大时的概率。

$$\psi_n(x) = N_n \exp(-\frac{1}{2} a^2 x^2) H_n(ax) \quad N_n = \left\{ \frac{a}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \right\}^{1/2}, \quad a = \sqrt{\frac{\mu \omega_0}{\hbar}}$$

$$H_0(\xi) = 1, H_1(\xi) = 2\xi, H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2, \dots \dots (\xi = ax)$$

$$\text{厄密多项式递推关系: } H_{n+1}(\xi) - 2\xi H_n(\xi) + 2nH_{n-1}(\xi) = 0$$

五, (本题中每小题 10 分, 共 20 分)

(1) 粒子处于势阱中 $V(r) = -V_0 \exp(-\frac{r}{a})$, 试探波函数 $\exp(-\lambda r)$, (λ 为变分参数) 用变分法求它最低能级的上界。这里取 $\frac{\hbar^2}{mV_0 a^2} = \frac{3}{4}$, m 为粒子质量。

(2) 设粒子的势能函数 $V(x, y, z)$ 是坐标的 n 次齐次函数, 即

$$V(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n V(x, y, z)$$

试用变分法证明: 在束缚态下, 动能 T 和势能 V 的平均值满足下列关系:

$$2\overline{T} = n\overline{V} \quad (\text{维里定理})$$