

2002 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目: 高等数学 A

招生专业:

一、填空题(每小题 4 分, 共 20 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}} =$ _____

2. 交换积分次序 $\int_0^{\sqrt{2}} dx \int_{\sqrt{2-x^2}}^{x+\sqrt{2}} f(x, y) dy =$ _____

3. 设 $y = (1 + x)^{\sin x}$, 则 $dy =$ _____

4. 计算不定积分 $\int \frac{dx}{1 + e^x} =$ _____

5. 曲面 $z = ax^2 + by^2$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的法线方程是 _____

二、计算题(每小题 6 分, 共 30 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} x^2 e^t dt}{x^4}.$

2. 求 $y = \begin{cases} x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 的导函数 $f'(x)$.

3. 设 $y = f(x^2, t)$, 其中 t 由方程 $\phi(x, y^2, t) = 0$ 确定, 且 $\phi(x, y, t)$ 可微, 求 $\frac{dy}{dx}$.

4. 计算曲线积分 $\int_{AnO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$. 其中 AnO 为由点 $A(a, 0)$ 到点 $O(0, 0)$ 的上半圆周.

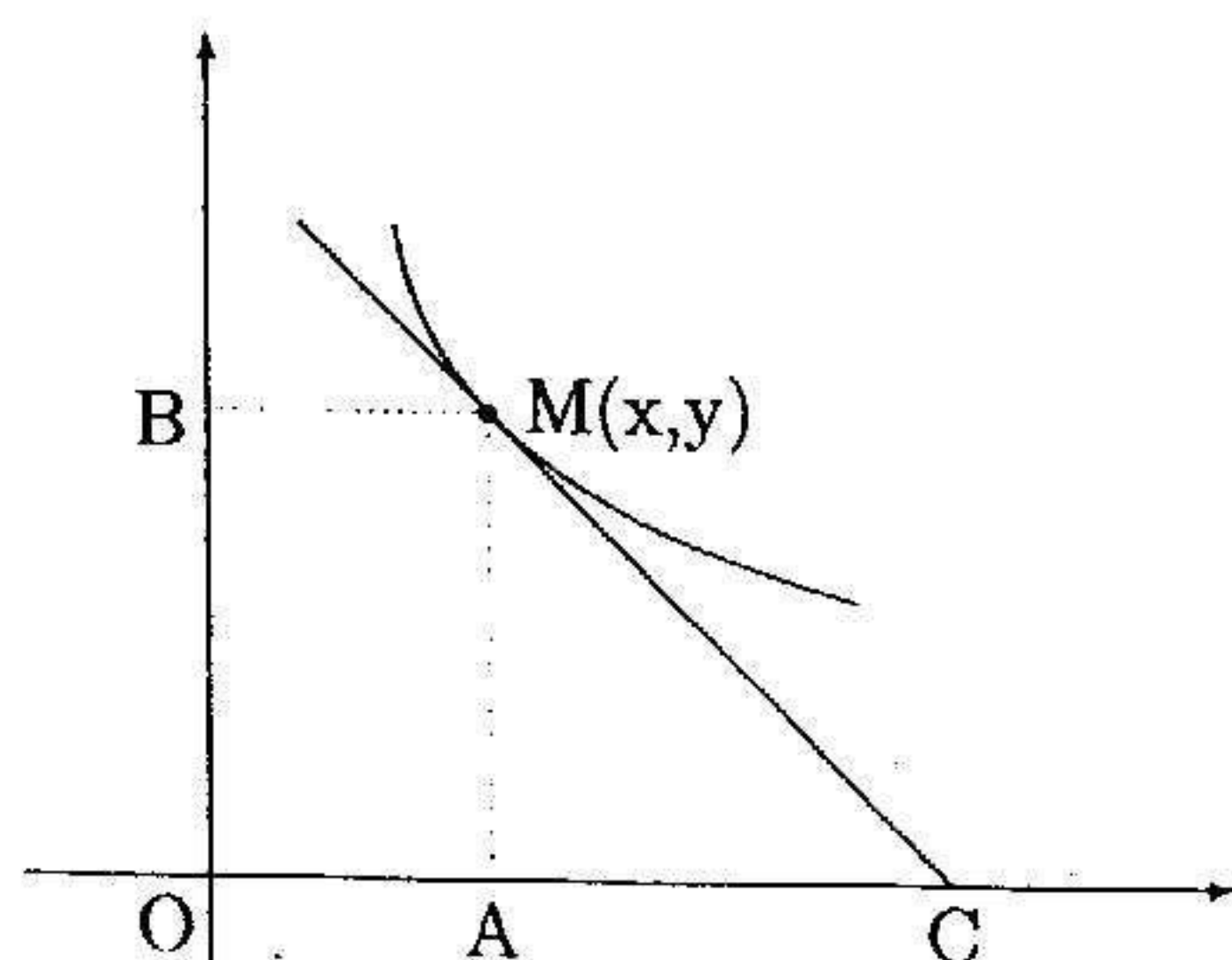
5. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} z \, dx \, dy$, 其中 Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2$ 被柱体 $x^2 + y^2 \leq 2y$ 所截柱体内部分.

三、(12分) 试求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)x^{2n}$ 的收敛域及和函数并据此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$ 的和.

四、(12分) 设 V 为 $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $x^2 + y^2 \leq x$ 相交所成的曲顶柱体(圆柱内部分).

(1) 求 V 的体积; (2) 求 V 的全面积.

五、(12分) 在第一象限内有曲线过点 $(4,1)$, 从曲线上任一点 $M(x,y)$ 向 x 轴和 y 轴作垂线, 垂足分别为 A 和 B , 点 M 处的切线交 x 轴于 C . 若长方形 $OAMB$ 和三角形 MAC 面积相等, 求曲线方程.



六、(14分) 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 证明

$$\int_0^1 f^2(x) \, dx \leq \frac{1}{8} \int_0^1 f'^2(x) \, dx$$