

《高等代数》试题

一. 计算行列式:

(15分)

$$\begin{vmatrix} x & 4 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 1 & x & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & x & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 2 & x & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

二. 设 $2n$ 阶实对称矩阵

(15分)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

试求正交矩阵 T , 使 $T'AT = T^{-1}AT = B$ 为对角矩阵, 并求矩阵 B .三. 设 \mathcal{A} 为数域 K 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换, 满足 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, A 为 \mathcal{A} 在 V 的某基下的矩阵, $\text{rank } A = r$. (20分)1. 证明: (1) $\mathcal{A} + \mathcal{E}$ 为 V 的可逆线性变换;(2) $\text{rank } A = \text{Tr } A$.2. 试求 $|2E - A|$.这里, E 为单位矩阵, \mathcal{E} 为恒等变换, rank 与 Tr 分别表示秩与迹.四. 设 B 是 $n \times n$ 正定矩阵, C 是秩为 m 的 $n \times m$ 实矩阵, $n > m$. 令 (20分)

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ C' & 0 \end{pmatrix}$$

证明: A 有 n 个正的特征值, m 个负的特征值.五. 设 $f(x)$ 为实系数多项式. (15分)证明: 如果对任何实数 c 都有 $f(c) \geq 0$, 则存在实系数多项式 $g(x)$ 和 $h(x)$, 使

$$f(x) = (g(x))^2 + (h(x))^2.$$

六. 设 A, B 都是 n 阶方阵, $\text{rank } A = n - 1$. (15分)证明: 如果 $AB = BA = 0$, 则存在多项式 $g(x)$, 使 $B = g(A)$.