华 东 师 范 大 学

2003年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：《数学分析》

招生专业：

一.(30分)简答题(只需写出正确答案).

1. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin^2(1-x)}{(x-1)^2(x+2)}=$

2. $y=\arccos(\frac{1}{1+x^2})$, 则 $y'=$

3. $\int\ln^2 x dx=$

4. $z=y^x\sin(\frac{x}{y})$, 则$dz=$

5. $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le1\}$, 则$\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy=$

6. $L=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$, 方向为顺时针方向,则$\int_L xdy-ydx=$

二.(20分)判别题(正确的说明理由,错误的举出反例).

1. 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=0$.

2. 若$f(x)$在$(0,\infty)$上可导,且导函数$f'(x)$有界, 则$f(x)$在$(0,\infty)$上一致连续.

3. 若$f(x)$在$[a,b]$上可积, $F(x)=\int_a^x f(t)dt$在$x_0\in(a,b)$上可导, 则$F'(x_0)=f(x_0)$.

4. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$收敛, 且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

三. (17分)求极限 $\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$.

记此极限为$f(x)$, 求函数$f(x)$的间断点, 并判别间断点类型.

四. (17分)设$f'(x)$在$[0,a]$上连续, 且$f(0)=0$. 证明:

$$\left|\int_0^a f(x)dx\right| \le \frac{Ma^2}{2},$$

其中 $M=\max\limits_{0\le x\le a}|f'(x)|$.

五. (17分) 若函数$f(x,y)$在 R^2上对 x连续, 且存在 $L>0$, 对 $\forall x,y',y''\in R$,

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\le L|y'-y''|.$$

求证: $f(x,y)$在R^2上连续.

六. (17分) 求下列积分

$$I=\iint_S f(x,y,z)dS,\quad (a>0)$$

其中 $S=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=a^2\}$,

$$f(x,y,z)=\begin{cases} x^2+y^2, & z\ge\sqrt{x^2+y^2} \\ 0, & z<\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}.$$

七. (17分)设$0<r<1, x\in R$.

(1) 求证: $\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}=1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx$;

(2) 求证: $\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)dx=0$.

八. (15分)$a>0, b>0$. $a_1=a, a_2=b$. $a_{n+2}=2+\frac{1}{a_{n+1}^2}+\frac{1}{a_n^2}, n=1,2,\cdots$.
求证: $\{a_n\}$收敛.