华 东 师 范 大 学

2004年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：高等代数与数学分析

招生专业： 数理统计

考生注意：

无论以下试题中是否有答题位置，均应将答案做在考场另发的答题纸上（写明题号）。

一.高等代数

一、填空、选择、是非题（共9小题，36分 每小题4分）

1. 设k是实数，T是正交矩阵. 若kT也是正交矩阵，则$k=$__________.

2. 实对称矩阵A正定的充分必要条件是

(A) A^{-1}正定； (B) A的特征值都非负；

(C) A的秩为n； (D) A的所有k级子式都大于零.

3. 设A为n阶可逆阵，λ是A的特征值，则__________必为A的伴随矩阵A^*的特征值.

(A) $\lambda^{-1}|A|^n$； (B) $\lambda^{-1}|A|$； (C) $\lambda|A|^n$； (D) $\lambda|A|$.

4. 设$V=\{A\in M_2(\mathrm{R}) \mid \mathrm{Tr}(A)=0\}$是关于矩阵的加法和数乘构成的实线性空间，则线性空间V的维数等于__________.

5. 设A为3阶矩阵，且$|A|=-\frac{1}{2}$，则$|A^{-1}-2A^*|=$__________.

6. 若向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出，则

(A) 存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$；

(B) 存在一组全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$；

(C) 每个α_i都可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s,\beta$线性表出；

(D) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$线性相关.

7. 设A是n阶矩阵，则存在非零$n\times m$矩阵B，使$AB=0$的充分必要条件为A的秩__________.

8. 已知3阶矩阵A的三个特征值为2, 3, 4，则$-A^{\mathrm{T}}$的特征多项式$f(\lambda)=$__________.

9. 已知

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

则$(2A)^{-1}=$____________________.

二、计算题

1. (12分) 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

2. (13分) 用正交线性替换化下列二次型为典范型

$$2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3.$$

三、证明题

1. (14分) 若n阶矩阵A满足: $A^2+2A+3E=0$.

(1) 证明: 对任意实数a, $A+aE$可逆;

(2) 求$A+4E$的逆矩阵.

二.数学分析

四.(15分)计算题.

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x-\dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

2. 求 $\int\dfrac{xe^{-x}}{(1-x)^2}dx$.

3. 求曲面积分 $\int\int_S(2x+z)dydz+zdxdy$, 其中 $z=x^2+y^2,(0\le z\le 1)$, 取上侧.

五.(15分)判别题(正确的证明，错误的举出反例).

1. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续有界, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

2. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛.

3. $f(x,y)$ 在 R^2 上连续, $D_r(x_0,y_0)=\{(x,y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r^2\}$,
若 $\forall(x_0,y_0),\forall r>0$, $\int\int_{D_r}f(x,y)dxdy=0$, 则 $f(x,y)=0,(x,y)\in R^2$.

六.(45分)证明题.

1. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,
求证：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$上有最大值或最小值.

2. 设 $f_n(x),n=1,2,\cdots$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.
若 $\forall x\in[a,b], f(x)>0$.
求证: $\exists N,\delta>0$, 使 $\forall x\in[a,b], n>N$, $f_n(x)>\delta$.

3. 若函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续，求证: $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[1,+\infty)$上有界.