华东师范大学

2004 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目: 高等数学(A)

招生专业:

考生注意:

无论以下试题中是否有答题位置, 均应将答案做在考场另发的答题纸上(写明题号)

一、 填空题(本题共有 5 小题, 每小题 5 分, 满分 25 分)

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x-\dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}=$ ________

2. 给定 $n\to\infty$ 时的无穷小如下: $1-\cos\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n}\tan^2\dfrac{1}{n}$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^4}\right)$, $a^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1$ $(a>0, a\neq 1)$, 按着从高阶无穷小到低阶无穷小的次序将它们排列起来: ________

3. 计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x=$ ________

4. 密度 $\mu=1$ 的均匀物体 Ω 由曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 及平面 $z=0, z=1$ 围成, Ω 关于 z 轴的转动惯量是 ________

5. 微分方程 $xy'-y=2\sqrt{xy}$ 的通解是 ________

二、选择题 (本题共有 5 小题, 每小题 5 分, 满分 25 分)

6. $x>0$ 时, 已知 $f(\ln x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, 则 $\displaystyle\int_{-2}^{2}xf'(x)\,\mathrm{d}x=$ ________

(A) $-\dfrac{4}{\mathrm{e}}$ (B) $\dfrac{4}{\mathrm{e}}$ (C) $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$ (D) $-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$

7. 设 $f(x)=\begin{cases} x^{\frac{3}{2}}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ x^2, & x\le 0, \end{cases}$ 下列结论正确的是 ________

(A) $f(x)$ 在 $x=0$ 不连续. (B) $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续.

(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 连续但不可导.

(D) $f(x)$ 在 $x=0$ 可导, $f'(x)$ 在 $x=0$ 不连续.

8. $y=2(x-1)^2$ 的最小曲率半径为 ________

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\dfrac{1}{4}$ (D) 2

9. 向量场 $\vec{F}=\{\sin x,\cos x,z^2y\}$ 在点 $M(0,2,3)$ 处的散度 $\operatorname{div}\vec{F}(M)=$ ________

(A) 19 (B) 22 (C) 13 $\sqrt{145}$

10. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则 ________

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 必收敛 (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 必收敛

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2+n}$ 必收敛 (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 必收敛

三、解答题 (本题共有 8 小题, 满分 100 分. 解答应给出文字说明、证明过程或演算步骤)

11. (12 分) 计算累次积分 $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^1 x^5\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y.$

12. (14 分) 求函数 $I(x)=\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{x}\frac{\ln t}{t^2-2t+1}\,\mathrm{d}t$ 在区间 $[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ 上的最大值.

13. (14 分) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} 3z\,\mathrm{d}S$, 其中 $\Sigma: z = 2-(x^2+y^2)$ 在 xOy 平面上方部分.

14. (14 分) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ 的收敛域, 并求出和函数, 再由此计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$.

15. (14 分) 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的二阶导数, 并使曲线积分

$$\int_C \left[3\varphi'(x) - 2\varphi(x) + \mathrm{e}^{3x}\right] y\,\mathrm{d}x + \varphi'(x)\,\mathrm{d}y$$

与路径无关, 求 $\varphi(x)$.

16. (10 分) 已知 $f(x,y)=0$, $\varphi(x,y)=0$ 是两光滑平面曲线, (α,β), (ξ,η) 分别为两曲线上的点, 若 $\beta\neq\eta$, $f_y(\alpha,\beta)\neq 0$, $\varphi_y(\xi,\eta)\neq 0$, 如果这两点是这两曲线上相距最近或最远的点, 证明成立关系式:

$$\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta} = \frac{f_x(\alpha,\beta)}{f_y(\alpha,\beta)} = \frac{\varphi_x(\xi,\eta)}{\varphi_y(\xi,\eta)}.$$

17. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 并满足 $f(0) = \int_0^1 f(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. 证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f(\xi)+f'(\xi)=0$.

18. (12 分) A 城与 B 城相距 S 米, 火车从 A 城到 B 城用时 T 秒, 求证存在时刻 $t_0\in[0,T]$ 使火车在 t_0 时刻的加速度 a 满足 $|a|\geq \dfrac{4S}{T^2}$.