72

华 东 师 范 大 学

2004年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目: 高等代数

招生专业:

共2页

考生注意:

无论以下试题中是否有答题位置,均应将答案做在考场另发的答题纸上(写明题号)。

一、填空、选择、是非题(共15小题, 满分60分, 每小题4分)

1. 设k是实数, T是正交矩阵. 若kT也是正交矩阵, 则$k=$________.

2. 实对称矩阵A正定的充分必要条件是

(A) A^{-1}正定; (B) A的特征值都非负;

(C) A的秩为n; (D) A的所有k级子式都大于零.

3. 设A为n阶可逆阵, λ是A的特征值, 则________必为A的伴随矩阵A^*的特征值.

(A) $\lambda^{-1}|A|^n$; (B) $\lambda^{-1}|A|$; (C) $\lambda|A|^n$; (D) $\lambda|A|$.

4. 设$V=\{A\in M_2(\mathbf{R}) \mid \mathrm{Tr}(A)=0\}$是关于矩阵的加法和数乘构成的实线性空间, 则线性空间V的维数等于________.

5. 设8元非齐次线性方程组的系数矩阵A的秩等于3, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是该方程组线性无关的解向量组, 则$s$的最大值

(A) 小于5; (B) 等于5; (C) 等于6; (D) 大于6.

6. 五阶实对称矩阵的集合关于相合这一等价关系可分成________个不同的等价类.

7. 设A为3阶矩阵, 且$|A|=-\frac{1}{2}$, 则$|A^{-1}-2A^*|=$________.

8. 若向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出, 则

(A) 存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$, 使$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$;

(B) 存在一组全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$, 使$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$;

(C) 每个α_i都可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s,\beta$线性表出;

(D) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$线性相关.

9. 设A是n阶矩阵, 则存在非零$n\times m$矩阵B, 使$AB=0$的充分必要条件为A的秩________.

10. 已知3阶矩阵A的三个特征值为2, 3, 4, 则$-A^{\mathrm{T}}$的特征多项式$f(\lambda)=$________.

11. 已知

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix},$$

则$(2A)^{-1}=$______________________.

12. 如果矩阵A与B相似, 则$2A$与$3B$等价.

13. 设A是n阶复矩阵, 则A与AA^{T}必有相同的秩.

14. 如果欧几里得空间V上的线性变换$\mathcal{A}$在V的任意一个规范正交基下的矩阵是对称矩阵, 则$\mathcal{A}$是对称变换.

15. 设$W_1, W_2, \cdots, W_m$是线性空间V的线性子空间, 且$\dim(W_1+W_2+\cdots+W_m)=\dim W_1+\dim W_2+\cdots+\dim W_m$, 则$W_1+W_2+\cdots+W_m$是直和.

二、计算题(共4小题)

16. (12分) 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ 2 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1\\ 3 & 2 & 1 & 2 & \cdots & n-2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1\end{vmatrix}.$$

17. (14分) 求所有整数m, 使得x^4-mx^2+1在有理数域上可约.

18. (14分) 用正交线性替换化下列二次型为典范型

$$2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3.$$

19. (12分) 设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$是两个非零的复向量, 且$\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i=0$. 令$A=\alpha^{\mathrm{T}}\beta$. 试求$A$的若尔当典范型以及不变因子.

三、证明题(共3小题)

20. (14分) 设A, B, C, D是n阶矩阵, $G=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$. 如果$AC=CA$, $|A|\neq 0$.

(1) 证明: $|G|=|AD-CB|$;

(2) 当$|AD-CB|=0$时, 证明: $n\leqslant \mathrm{rank}(G)<2n$.

21. (14分) 若n阶矩阵A满足: $A^2+2A+3E=0$.

(1) 证明: 对任意实数a, $A+aE$可逆;

(2) 求$A+4E$的逆矩阵.

22. (10分) 设A是非零的半正定矩阵, B是正定矩阵. 证明: $|A+B|>|B|$.