

华东师范大学

2004 年攻读硕士学位研究生试题

考试科目：概率论

招生专业：概率论与数理统计

共 2 页

考生注意：无论以下试题中是否有答题位置，均应将答案做在考场另发的答题纸上（写明题号）。每题 15 分，总分 150 分。

一、设 $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$ ，试证： A 与 B 独立的充要条件是

$$P(A|B) + P(\bar{A}|\bar{B}) = 1.$$

二、设随机变量 X 具有概率密度

$$p(x) = \begin{cases} (\cos^2 x)/\pi, & |x| < \pi, \\ 0, & |x| \geq \pi. \end{cases}$$

试问：

- (1) $|X|$ 与 X 是否相关，为什么？
- (2) $|X|$ 与 X 是否独立，为什么？

三、口袋中有 1 个黑球和 $n-1$ 个白球，每次从中任取出一球，并投入一个白球。试求第 k 次取球时取出白球的概率。

四、口袋中有 a 个白球、 b 个黑球和 c 个红球，从中一个一个不返回地取球。试求白球比黑球早取出的概率。

五、设随机变量 X 与 Y 独立同分布，其共同密度为

$$p(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

记 $U = X + Y$, $V = X/U$ 。

- (1) 试求 (U, V) 的联合密度函数；

(2) 以上 U 和 V 是否独立.

六、设随机变量 X_1 和 X_2 相互独立, 且都服从 $N(0, \sigma^2)$ 分布, 记

$$Y = (X_1 - X_2)^2 / (X_1 + X_2)^2.$$

试证: $P(Y > 1) = P(Y < 1) = 0.5$.

七、试证明函数

$$\varphi(t) = \frac{\cos t}{1 - it}, \quad -\infty < t < \infty$$

是特征函数, 并找出相应的分布函数.

八、设随机变量 X 服从 $(-\pi, \pi)$ 上的均匀分布. 证明:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin(kX) \xrightarrow{P} 0.$$

九、设随机变量 ξ_n 服从自由度为 n 的 χ^2 分布, 其分布密度为

$$p_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad n \geq 1.$$

令 $X_n = (\xi_n - n) / \sqrt{2n}$. 试证明当 $n \rightarrow \infty$ 时, X_n 依分布弱收敛于 $N(0, 1)$ 分布

十、设随机变量 X 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布, 记

$$Y = \begin{cases} +1, & X \in [0, 1/4] \cup (3/4, 1], \\ -1, & X \in (1/4, 3/4]. \end{cases}$$

(1) 试求 (X, Y) 的联合分布;

(2) 记 $Z = E(X|Y)$, 试求 Z 的分布;

(3) 试问 X 与 Y 是否独立.