华 东 师 范 大 学

2005年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：量子力学

招生专业：(物理)课程与教学论　理论物理　凝聚态物理　光学　无线电物理　生物物理学

考生注意：

无论以下试题中是否有答题位置，均应将答案作在考场另发的答题纸上（请写明题号）

一、判断题（判断以下说法的正误，分别用“+”和“—”标示出来。本题共有6小题，每小题2分，满分12分）

1. 光电效应实验主要体现了光场的粒子性。
2. 在粒子双缝衍射实验中，能够在不破坏粒子本身状态的情况下，确定粒子从哪个缝穿过。
3. 两个厄密算符的乘积也必然是厄密算符。
4. 海森堡不确定关系表明：不管将来的测量技术如何改进，同时测量一个微观粒子的坐标和动量是不可能的。
5. 设$\hat{\Omega}$为对应力学量Ω的算符，则对量子态$\psi(\bar{x})$进行关于力学量Ω的测量，所得Ω的实测值必是算符$\hat{\Omega}$的本征值之一。
6. 根据全同粒子交换对称性可知，全同粒子系统的波函数必须是全对称的。

二、简答题（简要回答下列问题，本题共有6小题，每小题5分，满分30分）

1. 设在球坐标中，粒子波函数是$\psi(r,\theta,\varphi)$，则在球壳$(r,r+dr)$中找到粒子的几率是多少？
2. 在满足什么样的条件下，求解薛定谔方程可以得到定态解？

3. 若两个算符 $\hat{A}$、$\hat{B}$ 满足对易关系 $[\hat{A},\hat{B}]\equiv\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}=1$，对任意正整数 n，求：

$[\hat{A},\hat{B}^n]=?$

4. 写出泡利矩阵 $\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 的本征值和相应的归一化本征矢。

5. 证明：对于非简并态情形下，基态能级的微扰二级修正不大于零。

6. 一个质量为 m，带电为 q 的粒子在矢势为 $\bar{A}$、标势为 φ 的电磁场中运动，写出该粒子运动的薛定谔方程。

三、综合计算题（本题共有 6 小题，满分 108 分，解答应给出必要的演算步骤、证明过程或文字说明）

1.（20 分）一个质量为 m 的粒子处于一维无限深方势阱（$0<x<a$）的基态，

（1）求坐标和动量的平均值 $\langle x\rangle$ 和 $\langle p\rangle$.

（2）若定义 $\Delta A=\sqrt{\langle A^2\rangle-\langle A\rangle^2}$，则对上述态，求不确定关系 $\Delta x\cdot\Delta p=?$

2.（20 分） 在 $t=0$ 时，氢原子的波函数为

$$\psi(\bar{r},0)=A\left(2\psi_{100}+\psi_{210}+\psi_{211}+\sqrt{3}\psi_{21-1}\right),$$

其中右方函数下标表示量子数 nlm，A 为归一化正系数，忽略自旋与辐射跃迁.

（提示：氢原子能级为 $E_n=-\dfrac{e^2}{2n^2a}$，a 为玻尔半径）

（1）$A=?$

（2）求 $t=0$ 时该体系的平均能量.

（3）在 $t=0$ 时，轨道角动量的 z 分量 L_z 的可能测量值是多少？平均值是多少？

（4）在 $t=0$ 时，求 $\hat{L}^2$ 的可能测量值及相应几率。

（5）写出任意 t 时刻的体系波函数 $\psi(\vec{r},t)$。

3.（20分）在一维谐振子的哈密顿量 $\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$ 中引进算符

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x}+i\frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}\hat{p}\right)\quad,\quad a^{+}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x}-i\frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}\hat{p}\right)$$

（1）证明：$[a,a^{+}]=1$。

（2）导出用 a、a^{+} 表示的哈密顿量 $\hat{H}$ 的形式。

（3）设 $|n\rangle$ 是 $\hat{H}$ 的本征态矢，本征值是 E_n，证明：$a^{+}|n\rangle$ 和 $a|n\rangle$ 也分别都是 $\hat{H}$ 的本征态矢，且本征值分别是 $E_n+\hbar\omega$ 和 $E_n-\hbar\omega$。

4.（18分）设某体系哈密顿量在能量表象中的矩阵是

$$H=H_0+H'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&\varepsilon&0\\\varepsilon&0&0\\0&0&\varepsilon\end{pmatrix},\qquad \text{其中}\ \varepsilon\ \text{是小实数。}$$

（1）试用微扰论求体系的能量本征值（准确到二级）。

（2）求出该体系能量本征值的严格解，并与用微扰论求得的结果进行比较，指出其实际上是取了何种近似？

5.（15分）粒子在二维势场 $V(x,y)=\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+2\lambda xy)$ 中运动，其中 $-1<\lambda<1$，m 为粒子质量。

（1）求能量本征值。

（2）如果取 $\lambda=\frac{3}{5}$，此时的能级是简并的吗？若是，则求出其简并度。

6. (15分）一个自旋为$\frac{1}{2}$，磁矩大小为μ的粒子处于如下旋转磁场中：

$$\vec{B} = B\cos(\omega t)\vec{e}_x + B\sin(\omega t)\vec{e}_y$$

其中磁场大小B为定值。若$t=0$时粒子的自旋沿z轴负方向，求$t>0$时粒子的自旋沿z轴正方向的几率。

（提示：三个泡利矩阵分别是$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$，$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$）