

考试科目: 高等数学 B

招生专业:

考生注意:

无论以下试题中是否有答题位置, 均应将答案做在考场另发的答题纸上(写明题号)

一、填充题(在答题纸上只写最后结果, 每小题5分, 共35分)

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} =$

2. 设  $f(x)$  是连续函数, 且满足  $\int_0^x f(t) dt = e^{-2x}$ , 则  $f'(0) =$

3. 设  $D = \{(x, y) | 3 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ , 则  $\iint_D d\sigma =$

4. 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x = -3$  处条件收敛, 则该幂级数的收敛半径为

5. 微分方程  $y' + 2xy = xe^{-x^2}$  的通解为

6. 设  $f(0) = 1, f'(0) = -2$ , 则极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cos x - 1}{x} =$

7. 设  $a_1, a_2, a_3$  是3维列向量, 记  $A = (a_1 \ a_2 \ a_3), B = (a_3 \ a_2 \ a_1), C = 2A - B$ ,  $|A| = -2$ , 则  $|C| =$

二、选择题(每小题5分, 共35分)

1. 当  $x \rightarrow 0$  时, 与  $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$  等价的无穷小量是 ( )

(A)  $x$ ;(B)  $2\sqrt{x}$ ;(C)  $x^2$ ;(D)  $2x$ .

2. 已知函数  $y_1 = e^{2x}$  和  $y_2 = e^{-3x}$  都是常系数线性微分方程  $y'' + ay' + by = 0$  的解, 则  $a, b$  分别为 ( )

(A) 1, 6;

(B) -1, 6;

(C) 1, -6;

(D) -1, -6.

3. 设函数  $z = z(x, y)$  由方程  $xyz = e^z$  所确定, 则  $\frac{\partial z}{\partial x} =$  ( )

(A)  $\frac{yz}{e^z - xy}$ ;

(B)  $-\frac{yz}{e^z - xy}$ ;

(C)  $\frac{e^z - xy}{yz}$ ;

(D)  $-\frac{e^z - xy}{yz}$ .

4. 设  $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ , 则曲线 ( )

(A) 没有渐近线;

(B) 有水平渐近线  $y = 1$ ;(C) 有两条垂直渐近线  $x = \pm 1$ ;(D) 有两条垂直渐近线  $x = \pm 1$  及一条水平渐近线  $y = 1$



5. 设  $f(x, y)$  为连续函数, 则  $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(x, y) dy = ( )$

(A)  $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$ ; (B)  $\int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx$ ; (C)  $\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx$ ; (D)  $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$ .

6. 在下列函数中, 不是  $\sin 2x$  的原函数的函数是 ( )

(A)  $\sin^2 x$ ; (B)  $-\cos^2 x$ ; (C)  $\frac{1}{2} \cos 2x$ ; (D)  $-\frac{1}{2} \cos 2x$ .

7. 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 则下列向量组中, 线性无关的是 ( )

(A)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ ; (B)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$ ;

(C)  $\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$ ; (D)  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 22\alpha_3, 3\alpha_1 + 5\alpha_2 - 5\alpha_3$ .

### 三、计算与证明题(本大题共 80 分, 每小题 10 分)

1. 设  $z = x^2 f\left(\frac{x}{y^2}\right)$ , 其中  $f(u)$  为可导函数, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ .

2. 设  $D$  是由直线  $x - y + 1 = 0$  与抛物线  $y = 1 - x^2$  所围成的平面图形, 求

(1)  $D$  的面积; (2)  $D$  绕  $x$  轴旋转所产生的旋转体体积.

3. 求函数  $f(x, y) = 12x - 16y - x^2 - y^2$  在  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 25\}$  上的最大值和最小值.

4. 求幂级数  $2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$  的收敛域与和函数.

5. 求曲面  $x = \frac{y^2}{2} + 2z^2$  上平行于平面  $2x + 2y - 4z + 1 = 0$  的切平面方程, 并求切点处的法

线方程.

6. 设函数  $u = u(x, y)$  具有二阶连续偏导数且满足方程  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  以及下列条件:

(1)  $u(x, 2x) = x^2$ , (2)  $u'_x(x, 2x) = x^4$ . 求  $u''_{xx}(1, 2)$ ,  $u''_{xy}(1, 2)$  和  $u''_{yy}(1, 2)$ .

7. 设  $A$  和  $B$  都是  $n$  阶方阵,  $f(\lambda)$  是  $B$  的特征多项式, 证明:  $\text{rank}(f(A)) = n$  的充要条

件是  $B$  的特征值都不是  $A$  的特征值.

8. 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  ( $ab < 0$ ) 内满足  $f''(x) > 0$ , 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2e^{x^2}}{\ln(1 + x^2)} = 1.$$

证明:  $f(x) \geq 2, x \in (a, b)$ .