

考试科目代码及名称： 高等数学 B

招生专业：

考生注意：

无论以下试题中是否有答题位置，均应将答案做在考场另发的答题纸上（写明题号）。

一、填空题（只要最后结果，每小题 5 分，共 35 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{2}{x^2}} =$ _____ ;

2. 设 $z = xe^{x+y} + (x+1)\ln(1+y)$ ，则 $dz|_{(0,1)} =$ _____ ;

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 - \sin^2 x) \cos^3 x dx$ _____ ;

4. 微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$ ，满足 $y(-\pi) = 0$ 的解为 _____ ;

5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ 的和为 _____ ;

6. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{\sin \pi x}, & x < 0, x \neq -k (k \text{ 为自然数}) \\ \frac{x-1}{x^2-1}, & x \geq 0, x \neq 1 \end{cases}$

的可去间断点是 _____ ;

5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ 的和为 _____;

6. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{\sin \pi x}, & x < 0, x \neq -k (k \text{ 为自然数}) \\ \frac{x-1}{x^2-1}, & x \geq 0, x \neq 1 \end{cases}$ 的可去间断点是 _____;

7. 设 a_1, a_2, a_3 都是三维列向量, 令 $T = (a_1, a_2, a_3), J = (a_1 + a_2, -a_2 + 2a_3, a_1 + 2a_2 + 2a_3)$, 若行列式 $|T| = -2$, 则 $|J| =$ _____.

二、选择题 (每小题 5 分, 共 35 分)

8. 下列极限存在的是 ().

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{-\frac{1}{x}}$; (B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2^x - 1}$; (C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x(x+1)}}{x}$; (D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x}}$.

9. 若函数 $g(x) = x^5 + ax^2 + bx + c$, 且 $g(0) = g'(0) = 0$, 则下列不正确的是 ().

- (A) $b = c = 0$; (B) 当 $a \neq 0$ 时, $g(0)$ 为极值;
(C) 当 $a = 0$ 时, $(0, g(0))$ 为拐点; (D) 当 $a \neq 0$ 时, $(0, g(0))$ 为拐点.

10. 设 $z = g(x, y)$ 由 $e^{xyz} = x + y + z$ 确定, 则 $z = g(x, y)$ 在 $(x, y) = (0, 1)$ 处的两个一阶偏导数 $z'_x(0, 1)$ 和 $z'_y(0, 1)$ 分别为 ().

- (A) 0 和 -1; (B) -1 和 0; (C) 0 和 0; (D) -1 和 -1.

11. 若 $\int_0^{+\infty} \frac{adx}{a+bx^2} = 1$ (其中常数 $ab > 0$), 则 $\frac{b}{a} =$ ().

- (A) $\frac{\pi^2}{2}$; (B) $\frac{\pi^2}{2}$; (C) $\frac{4}{\pi^2}$; (D) $\frac{2}{\pi^2}$.

12. 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x > 0$ 时发散, 而在 $x = 0$ 处收敛, 则 ().

- (A) $a = 1$, 收敛区间为 $[-2, 0]$; (B) $a = -1$, 收敛区间为 $(-2, 0]$;
(C) $a = 1$, 收敛区间为 $(-2, 0]$; (D) $a = -1$, 收敛区间为 $[-2, 0]$.

13. 二阶微分方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 0$, $y(\frac{\pi}{6}) = 1$, $y'(\frac{\pi}{6}) = 0$ 的解 ()

- (A) $-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$; (B) $\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$;
(C) $\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$; (D) $-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$.

14. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, b 是 m 维列向量, x 是 n 维列向量, 且 $Ax = 0$ 只有零解,

则以下判断错误的是 ()

- (A) A 的行秩 $= n$; (B) A 的列秩 $= n$; (C) $Ax = b$ 有唯一解; (D) $m \geq n$.

三、解答题(本大题共 80 分, 每小题 10 分)

15. 求微分方程 $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$ 的通解和满足 $y'(2) = 1$, $y(2) = \frac{1}{2}$ 的特解.

16. 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} y \cos(z+x) dV$, 其中 Ω 是由抛物柱面 $y = \sqrt{x}$ 与平面 $y = 0$, $z = 0$,

15. 求微分方程 $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$ 的通解和满足 $y'(2) = 1, y(2) = \frac{1}{2}$ 的特解.
16. 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} y \cos(z+x) dV$, 其中 Ω 是由抛物柱面 $y = \sqrt{x}$ 与平面 $y = 0, z = 0, x+z = \frac{\pi}{2}$ 所围成的立体区域.
17. 设 $f(x, y) = 4 + 2x + 2y - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 9$, 求其最大值与最小值.
18. 设 $f(x)$ 可导, 且 $f(0) = 0, F(x) = \int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n) dt$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{2n}}$ (n 为自然数).
19. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n+1}$ 的收敛域与和函数.

20. 讨论参数 p, k 取何值时, 非线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 + 4x_4 = -2 \\ 3x_1 + px_2 + 2x_3 + 7x_4 = -2 \\ x_1 - 6x_2 - x_3 - x_4 = k \end{cases}$$
 有解? 无解? 有解时, 求通解.

21. 设 A 是 n 阶矩阵非奇异矩阵, α 为 n 列向量, b 为常数, 记分块矩阵

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{bmatrix}$$

其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵, I 为 n 阶单位阵.

(1) 计算并化简 PQ ;

(2) 证明: 矩阵 Q 可逆的充要条件是 $\alpha^T A^{-1} \alpha \neq b$.

22. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 二阶可导, 若 $f''(\xi) > 0$, 试证存在 $a, b (a < \xi < b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$