423 -43 427 -50 1

43

1-1

1999 年硕士研究生高等代数试题(上海交大)

1. (10 分) 设 P 为数域。$f(x),g(x)\in P[x]$。令 $F(x)=(x^2+1)f(x)+(x^2+x+1)g(x)$；$G(x)=xf(x)+(x+1)g(x)$。证明：若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素，则 $F(x)$ 与 $G(x)$ 也必互素。

2. (10 分) 设 J 为元素全为1的n阶方阵。

(1) 求 J 的特征多项式与最小多项式；

(2) 设 $f(x)$ 为复数域上多项式。证明 $f(J)$ 必相似于对角阵。

3. (10 分) (1) 设n阶实对称矩阵 $A=(x_{ij})$，其中 $x_{ij}=a_ia_j+1$，且 $a_1+a_2+\dots+a_n=0$。求A的n个特征值。

(2) 设 A 为复数域上n阶方阵。若 A 的特征根全为零，证明：$|A+E|=1$。此处 E 为n阶单位阵。

4. (10 分) 设 $f(x)$ 是数域F上的二次多项式，在F内有互异的根 x_1,x_2，设A是F上线性空间L的一个线性变换且 $A\neq x_1I$，$A\neq x_2I$（I为单位变换）且满足 $f(A)=0$。证明 x_1,x_2 为A的特征值；且 L 可以分解为A的属于 x_1,x_2 的特征子空间的直和。

5. (10 分) 用正交线性变换将下列二次型化为标准形，并给出所施行的正交变换：

$x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$。

6. (10 分) 对 t 的不同取值，讨论下面方程组的可解性并求解：

$(t+1)x_1+x_2+x_3=t^2+2t$

$x_1+(t+1)x_2+x_3=t^3+2t^2$

$x_1+x_2+(t+1)x_3=t^4+2t^3$

7. (10 分) 假设A为 $m\times n$ 实矩阵，B为 $n\times 1$ 实矩阵。A^T 表示A的转置矩阵。证明：

(1) $AB=0$ 的充要条件是 $A^TAB=0$；

(2) 矩阵 A^TA 与矩阵A有相同的秩。

8. (10 分) 设 $A_1,A_2,\dots,A_p$ 均为 n 阶矩阵且 $A_1A_2\dots A_p=0$。证明这 p 个矩阵的秩之和小于等于 $(p-1)n$，并举例说明等式可以达到。

9. (10 分) 证明任一可逆实矩阵可分解为一个正定阵和一个正交阵之积。

10. (10 分) 设W是欧氏空间V的一个子空间。$b\in V$，$a\in W$。证明若对任意 $a'\in W$，$|b-a|\le|b-a'|$，则 $b-a\perp W$。

74