1999 年上海交通大学概率论(含数理统计初步)试题

1999 年上海交通大学概率论(含数理统计初步)试题

一. 一个口袋中有3个白球，4个黑球。从中第一次取出2个球，如颜色相同则放回后再取第二次；如颜色不同则不放回再取第二次。求第二次取出2个球颜色不同的概率。（满分10分）

二. 某兵工厂生产的子弹弹头后端的直径服从参数 $\mu=8mm$，$\sigma=0.06mm$ 的正态分布，规定直径在范围 $(7.94mm, 8.12mm)$ 内为合格品，今生产 n 粒子弹，求合格品数的期望和方差。（满分15分）

$(\Phi(1)=0.8413,\ \Phi(2)=0.9772,\ \Phi(2.5)=0.9938)$

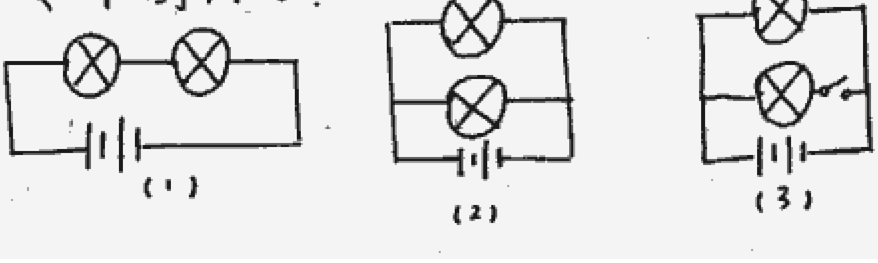
三. 设电路上有两个灯泡，联接的方式分别为：

(1) 串联

(2) 并联

(3) 一个备用一个工作，当工作的损坏时，备用的立即工作。

如下图所示。



设两个灯泡的寿命分别为X和Y，它们互相独立，其概率密度分别为：

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases};\quad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

试分别就上述三种情形，求出电路接通时间Z的概率密度。 （满分15分）

四. 将一颗均匀的骰子独立地掷n次，分别以X和Y表示在n次结果中出现一点和六点的次数，求cov(X, Y)。 （满分15分）

五. 设$\{X_n\}$为独立同分布随机变量序列，均服从区间(0,1)上的均匀分布，记$Y_n=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}X_i}$

证明：存在常数c使对$\forall\varepsilon>0$，下式成立

$$\lim_{n\to\infty}P(|Y_n-c|<\varepsilon)=1$$

并求出c的值。 （满分15分）

六. 设总体X服从分布B(1, P)，即X的分布列为：

X	0	1
$P(X=k)$	$1-p$	p

其中 p 是未知参数，$0<p<1$。设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的样本，记 $\hat{p}$ 为 p 的极大似然估计。

求 (1) $\hat{p}$；

(2) $\hat{p}$ 的分布列；

(3) 基于 $\hat{p}$ 构造 p^2 的无偏估计。(满分18分)

七. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{2m}$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，记 $\overline{X}_1 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$，$\overline{X}_{m+1} = \frac{1}{m}\sum_{i=m+1}^{2m} X_i$，

$$T = \sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X}_1)^2 + \sum_{i=m+1}^{2m}(X_i - \overline{X}_{m+1})^2.$$

试基于 T 构造 $\log\sigma^2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的区间估计。(满分12分)