1999年上海交通大学数学分析试题

1999年上海交通大学数学分析试题

一、选择题（每题3分，共15分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续但不可导，则 α 满足不等式（　）

A. $\alpha>0$；　B. $\alpha>1$；　C. $0<\alpha\leq 1$；　D. $1<\alpha<2$.

2. 若 $f(x)\in R[a,b]$，则下列结论正确的是（　）

A. $f(x)\in C[a,b]$；

B. $f(x)$ 在 (a,b) 内的任一子区间内至少有一个连续点；

C. $f(x)$ 可能在 $[a,b]$ 上每一点都不连续；

D. $f(x)$ 可能在 $[a,b]$ 上所有无理点处都不连续.

3. 若曲线 $y=2x^2+ax+b$ 与 $2y=xy^3-1$ 在点 $(1,-1)$ 处相切，则系数 a,b 的值为（　）

A. $\begin{cases} a=-3 \\ b=0 \end{cases}$；　B. $\begin{cases} a=-5 \\ b=2 \end{cases}$；　C. $\begin{cases} a=-3 \\ b=2 \end{cases}$；　D. $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$.

4. 二次积分 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy$ 的另一积分次序为（　）

A. $\int_0^1 dy\int_x^{x^2} f(x,y)\,dx$；　B. $\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y} f(x,y)\,dx$；

C. $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$；　D. $\int_{x^2}^{x} dy\int_0^1 f(x,y)\,dx$.

5. 曲线积分 $\oint_C \frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$ 的值为（　）

其中 C 是闭曲线 $|x|+|y|=1$ 的正向.

A. 0；　B. π；　C. 2π；　D. -2π.

下列命题是否正确，若正确证明之，若错误试举例说明.（每题5分，共25分）.

1. 若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续且有界，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上必一致连续.

2. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的邻域内二阶可导，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极小值.

3. 若广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则 $A=0$.

4. 若 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的任何邻域内均无界，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处必不可微.

5. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则对 $\{a_n\}$ 的任一子列 $\{a_{n_k}\}$ 都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n_k}$ 收敛.

计算下列极限（试写出计算过程及理由.共18分）.

1. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^{h}}{h^2}$，$(a>0, a\neq 1)$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{n!\cdot 3^n}$.

3. $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\sin^2 px}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

四. 设$\{a_n\}$为实数列，$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$. 证明必存在子列$\{a_{n_k}\}\subset\{a_n\}$，使$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{n_k}$收敛.（10分）

五. 设函数$g(x)$在$[0,+\infty)$上非负，$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A g(x)dx=\alpha$（$\alpha$为有限数），又$f(x)$在$[0,1]$上连续. 试证

$$\lim_{t\to0^+}\int_0^1 t^{-1}g(t^{-1}x)f(x)dx=\alpha f(0).$$（10分）

六. 设函数列$\{f_n(x)\}$在区间I上一致收敛于$f(x)$，且$f_n(x)$在I上一致连续（$n\in N$）. 证明：$f(x)$在I上也一致连续.（12分）

七. 设函数$f(x)$、$g(x)$都在$[a,b]$上连续，且$\int_a^b g(x)\neq0$，又$|f(x)|+|g(x)|\neq0$，$\forall x\in[a,b]$. 证明：至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

（10分）