上海交通大学

2002年硕士研究生入学考试试题

试题序号: 423　试题名称: 高等代数

（答案必须写在答题纸上，写在试题纸上的一律不给分）

1. (12 分) 设 $f_1(x) = af(x) + bg(x)$, $g_1(x) = cf(x) + dg(x)$ 且 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. 证明 $(f(x), g(x)) = (f_1(x), g_1(x))$.

2. (14 分) 计算行列式

$$\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}$$

3. (15 分) 问 k 取何值时，下列方程组 $AX = \beta$：(1)有唯一解；(2)无解；(3)有无穷多解，这时求它的通解. 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ k & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. (12 分) 设 A 为数域 P 上 n 阶可逆矩阵. 任意将 A 分为两个子块 $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$. 证明 n 维线性空间 P^n 是齐次线性方程组 $A_1X = 0$ 的解空间 V_1 与 $A_2X = 0$ 的解空间 V_2 的直和.

5. (10 分) 设 f(x)是方阵 A 的特征多项式, g(x)为任一多项式且 $(f(x), g(x)) = d(x)$. 证明: 秩$(g(A))$ = 秩$(d(A))$.

6. (12 分) 求正交变换化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型.

7. (15 分) 设σ为线性空间 V 的一个线性变换, $\sigma^2 = \sigma$. 证明: (1) σ的特征值只能为 1 或 0; (2)若用 V_1 与 V_0 分别表示对应于特征值 1 和 0 的特征子空间, 则 $V_1 = \sigma V$, $V_0 = \sigma^{-1}(0)$; (3) $V = V_1 \oplus V_0 = \sigma V \oplus \sigma^{-1}(0)$.

8. (10 分) 设 A, B 为 n 阶可对角化矩阵, 且 $AB = BA$. 证明 A, B 可同时对角化.

download.kaoyan.com