上海交通大学

2003年硕士研究生入学考试试题

试题序号：423　试题名称：高等代数

（答案必须写在答题纸上，写在试题纸上的一律不给分）

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$. 求 A^{100}.（15 分）

2. 以 $P^{2\times2}$ 表示数域 P 上的 2 阶矩阵的集合。假设 a_1,a_2,a_3,a_4 为两两互异的数而且它们的和不等于零。试证明 $A_1=\begin{pmatrix}1 & a_1\\ a_1^2 & a_1^4\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}1 & a_2\\ a_2^2 & a_2^4\end{pmatrix}$，$A_3=\begin{pmatrix}1 & a_3\\ a_3^2 & a_3^4\end{pmatrix}$，$A_4=\begin{pmatrix}1 & a_4\\ a_4^2 & a_4^4\end{pmatrix}$ 是 P 上线性空间 $P^{2\times2}$ 的一组基。（15 分）

3. 证明：n 阶实对称阵 A 的秩为 r（$r\le n$）当且仅当 A 可以写成 $A=CBC^T$，其中 C 为 $n\times r$ 阶满秩矩阵，B 为 r 阶可逆实对称阵。（15 分）

4. 假设 $f_0(x^5)+xf_1(x^{10})+x^2f_2(x^{15})+x^3f_3(x^{20})+$[redacted] 被 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 整除。证明：$f_i(x)(i=0,1,2,3,$[redacted]$)$ 被 $x-1$ 整除。（15 分）

5. 设 A 为 n 阶反对称实矩阵，$B=diag\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，其中 $a_i>0$. 证明 $|A+B|>0$.（15 分）

6. n 阶方阵 A 满足等式 $A=A^2$，当且仅当 $n=r(A)+r(E-A)$.（15 分）

7. 设 A,B 都是 n 阶实方阵，并设 λ 为 BA 的非零特征值。以 V_λ^{BA} 表示 BA 关于 λ 的特征子空间。(1) 证明：λ 也是 AB 的特征值；(2) 证明：维数（V_λ^{BA}）= 维数（V_λ^{AB}）。（20 分）

8. 设 A,B 都是 n 阶正定方阵。试证明：AB 的特征值为实数。（20 分）

9. 记 $V=P^{n\times n}$，P 为数域。假设 $A\in V$ 有特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$，但 $-\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均不是 A 的特征值。试证明：V 的变换 $\psi:X\to XA+A^TX$ 为同构。（20 分）