上海交通大学
2004年硕士研究生入学考试试题

试题序号: 315 试题名称: 数学分析

（答案必须写在答题纸上，写在试题纸上的一律不给分）

一．（14分）设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+2a_2+\ldots+na_n}{n^2} = \frac{a}{2}$。

二．（14分）证明 $\sin(x^2)$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续。

三．（14分）设 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$．证明 $\exists x_0 \in [0,a]$，使 $f(x_0)=f(x_0+a)$。

四．（14分）证明不等式

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x,\ \ x \in (0,\frac{\pi}{2}).$$

五．（14分）设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续．试证明

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = 0.$$

六．（14分）设 $x_{2n-1} = \frac{1}{n}, x_{2n} = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx, n=1,2,\ldots$．试证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ 收敛。

七．（14分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(1)=0$，$g_n(x)=f(x)x^n$，$n=1,2,\ldots$，证明 $\{g_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛。

八．（12分）设 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续．证明

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1)$$

九．（12分）设 $a_1>0, a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$，证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2n}}=1$，

十．（28分）计算下述积分。

1，$\int\int_D \sqrt{|y-x^2|}dxdy$，其中 D 是矩形区域 $|x|\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2$。

2．$\int\int_S yzdydz+(x^2+z^2)ydzdx+xydxdy$，其中 S 是曲面 $4-y=x^2+z^2$ 上 $y\geqslant 0$ 的那部分正侧。