上海交通大学
2006年硕士研究生入学考试试题

试题序号: 423　试题名称: 高等代数

（答案必须写在答题纸上，写在试题纸上的一律不给分）

1. 设有两个线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m = 0, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m = 0, \\ b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m = 1. \end{cases} \tag{2}$$

证明方程组 (1) 有解的充要条件是方程组 (2) 无解. (满分 15 分)

2. 计算下列行列式的值:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2+a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}+a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}.$$

(满分 15 分)

3. 取向量空间 $\mathbb{R}^4$ 的一组基 $\alpha_1=(-1,1,1,1)'$, $\alpha_2=(1,-1,1,1)'$, $\alpha_3=(1,1,-1,1)'$, $\alpha_4=(1,1,1,-1)'$. 已知在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下, 向量 α 的坐标是 $(-2,0,1,2)'$, 线性变换 φ 的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

求在基 $\beta_1=(3,1,1,1)'$, $\beta_2=(1,3,1,1)'$, $\beta_3=(1,1,3,1)'$, $\beta_4=(1,1,1,3)'$ 下, 向量 α 的坐标和线性变换 φ 的矩阵. (满分 25 分)

4. 用正交变换化二次型为 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_1x_2$ 标准型. (满分 30 分)

$8x_2x_3$

5. 设 A 是 3 阶实矩阵，且存在 $\alpha \in \mathbb{R}^3$ 使得 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha$ 线性无关，并且 $A^3\alpha = 5A^2\alpha - 6A\alpha$. 求矩阵 $2A^2 + 3I$ 的行列式，其中 I 是 3 阶单位阵.

(满分 15 分)

6. 若 p 为素数，证明

$$f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$$

在有理数域上不可约. (满分 15 分)

7. 设 A, B 是 n 阶复方阵， $AB = BA$, 又它们都相似于对角阵，证明存在非奇异矩阵 P, 使 $P^{-1}AP$ 及 $P^{-1}BP$ 同时为对角阵. (满分 20 分)

8. 设秩为 $n-1$ 的 n 阶矩阵 A 的特征值为

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n,$$

其中 $\lambda_n = 0$, 求 A^* 的 Jordan 标准型. (满分 15 分)