上海交通大学

2006年硕士研究生入学考试试题

试题序号：315　试题名称：数学分析

（答案必须写在答题纸上，写在试题纸上的一律不给分）

1. (10 分). 证明数列 $x_0=1$, $x_{n+1}=\sqrt{2x_n}\,(\forall n\geq 0)$ 有极限, 并求其值.

2. (10 分). 设数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛, 且 $x_n>0$, 证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to+\infty}x_n.$$

3. (10 分). 设 $a>\ln 2-1$, 证明: $x^2-2ax+1<e^x\ (\forall x>0)$.

4. (10 分). 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续的凸函数, 证明:

对任意的 x_1, $x_2\in[a,b]$, $x_1<x_2$, 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

5. (10 分). 已知

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

证明: $f^{(n)}(0)=0\,(\forall n\geq 0)$.

6. (10 分). 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0,1]$ 上一致有界. 证明: 存在子列 $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{+\infty}$, 使得对 $[0,1]$ 上的任一有理点 x_0, 极限 $\lim\limits_{k\to+\infty}f_{n_k}(x_0)$ 存在.

7. (15 分).

(1). 设 (a,b) 为有限或无限区间, 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 且

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to b-0}f(x)=A.$$

证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

(2). 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, 且 $0\leq f(x)\leq\dfrac{x}{1+x^2}$. 证明: 存在 $\xi>0$, 使得 $f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

8. (15 分). 已知 Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & \text{当}x=\dfrac{p}{q}\text{为有理数时}(q\in\mathrm{N}^+,\,p\in\mathbf{Z},\,p,\,q\text{互质}),\\ 0, & \text{当}x\text{为无理数时}.\end{cases}$$

(1). 证明：$R(x)$ 在无理点上连续，在非零有理点上不连续.

(2). 证明：$R(x)$ 在 $[0,1]$ 上是 Riemann 可积的.

9. (10 分). 设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，$f(x)>0\,(\forall x\geq 1)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln f(x)}{\ln x}=-\lambda$. 证明：当 $\lambda>1$ 时，积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

10. (15 分). 设函数 $u=u(x,y,z)$ 由下面的方程组给出：

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1.$$

证明：$|\mathrm{grad}u|^2=2A\cdot(\mathrm{grad}u)$. 其中 grad 为梯度，$A=(x,y,z)$.

11. (15 分). 对给定的不全为零的常数 a, b, c, 计算积分

$$I=\iiint\limits_V\cos(ax+by+cz)dxdydz,$$

其中 $V=\{x^2+y^2+z^2\leq 1\}$.

12. (20 分). 求 $x>0$, $y>0$, $z>0$ 时函数 $f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 上的极大值，并证明：当 a, b, c 为正实数时有 $ab^2c^3<108\left(\dfrac{a+b+c}{6}\right)^6$.