上海交通大学
2007年硕士研究生入学考试试题

试题序号: 423 试题名称: 高等代数

（答案必须写在答题纸上，写在试题纸上的一律不给分）

一、判断题 (10 分)

1. 设 A, B 为 n 阶方阵，且 A 秩等于 B 秩，则对任何自然数 m 都有 A^m 秩等于 B^m 秩.
2. 设 T 为实数域上 n 维线形空间 V 上的线形变换，则在 V 上不一定存在 T 的特征向量.
3. 若 n 维向量 b 不在由 A 的列向量生成的列向量空间中，则方程组 $Ax=b$ 无解.
4. 对一个矩阵实行行初等变换不改变其列向量的线性关系.
5. 任何一个实方阵必相似于一个实上三角阵.

二、(20 分)

1. 计算下列 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x+y & xy & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & xy & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y & xy \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x+y \end{vmatrix}$$

2. 已知 $a^2 \neq b^2$，试证方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_{2n} = 1 \\ ax_2 + bx_{2n-1} = 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ ax_n + bx_{n+1} = 1 \\ bx_n + ax_{n+1} = 1 \\ bx_{n-1} + ax_{n+2} = 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ bx_1 + ax_{2n} = 1 \end{cases}$$

有唯一解，并求出它的解.

三 (15 分)、问 k 取何值时，方程组 $AX=\beta$ (1) 有唯一解；(2) 无解；(3) 有无穷多解，此时求出它的通解，其中

$$A = \begin{pmatrix} 2-k & 3 & -6 \\ 3 & 2-k & -6 \\ -6 & -6 & 11-k \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

四（10分）、设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{s\times n}$. 证明 $Ax=0$ 的解也是 $Bx=0$ 的解的充要条件是 s 个方程组

$$A^T x = b_j,\ j=1,2,\cdots,s$$

都有解，其中 $b_j=(b_{j1},b_{j2},\cdots,b_{jn})^T$, $j=1,2,\cdots,s$.

五（20分）1、设 $f(x),g(x)$ 为数域 F 上的多项式，证明 $(f,g)=1$ 当且仅当 $(fg,f+g)=1$.

2、用 $x-a$, $x-b$, $x-c$ 除 $f(x)$ 的余式依次为 r,s,t, 试求用 $g(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ 除 $f(x)$ 的余式.

六（10分）、证明维数定理：设 V 为数域 F 上的 n 维线性空间，U_1,U_2 为 V 的两个子空间，试证

$$\dim(U_1+U_2)+\dim(U_1\cap U_2)=\dim U_1+\dim U_2.$$

七（10分）、设 A,B 分别是数域 F 上 $n\times m$, $m\times p$ 矩阵，V 是齐次线性方程组 $xAB=0$ 的解空间. 求证 $U=\{y=xA \mid x\in V\}$ 为 F^m 的子空间，并求 U 的维数.

八（10分）、A 为非零矩阵但不必为方阵，证明 $AX=E$ 有解当且仅当由 $CA=0$ 必有 $C=0$, 其中 E 为单位方阵.

九（15分）、设 A 为 n 阶正交方阵，并设 λ 是它的特征根，α 是属于特征根 λ 的特征向量，试证 $|\lambda|=1$. 当 λ 为复数时，将 α 的实部与虚部分开，即记 $\alpha=\beta+i\gamma$. 试证 β 和 γ 正交且长度相同.

十（14分）、设 n 阶矩阵 A 的 n 个特征值全相同，且不等于零.（1）求证矩阵 $nA-trAI$ 是奇异矩阵.（2）求 A^{-1}.

十一（16分）、V 为数域 F 上的 n 维线性空间.

1. 证明 V 的任意有限多个真子空间的并为 V 的真子集.

2. 设 $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\cdots,\mathcal{A}_s$ 为 V 上的 s 个两两不同的线性变换，证明存在 $v\in V$ 满足 $\mathcal{A}_i(v)$, $i=1,2,\cdots,s$ 互不相同.